1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixokat:

(a) A^2; (b) AB^T, A^TB; (c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$;

(b) az AB^T szorzat nem definiált, $A^TB = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $(A - A^T)B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Feladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet az

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

mátrix írja le (1 éves időtávon). A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Jelenleg 4 000 000 dolgozó és 1 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1, 2 illetve 3 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

(x pont)

MEGOLDÁS.

	1 év	2 év	3 év
Dolgozók száma:	3 800 000	3 760 000	3 752 000
Munkanélküliek száma:	1 200 000	1 240 000	1 248 000
Munkanélk. ráta:	24%	24.8%	24.96%

Van egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának: 25%.

3. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -25$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -160.$

4. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0.

(x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az a paraméter értéke 0 vagy $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}\right. .$$

(x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az egyenletrendszer megoldható: két kötött és két szabad változó lesz. Egy lehetséges általános megoldás: $x_3 = 4x_1 - x_2,\ x_4 = 2 - 11x_1 + 6x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$.

6. Feladat. Határozza meg az a és b valós paraméterek összes olyan értékét, amelyre a következő lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 8x_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a \end{array}\right.$$

(x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha $b \neq 57/5$ és $a = 2$.

7. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!) (x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Ha $a^2 - 5a \neq 0$, azaz $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, akkor pontosan egy megoldás van.
Ha $a = 0$, végtelen sok megoldás van.
Ha $a = 5$, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

8. Feladat. Számítsa ki a következő mátrix inverzét, ha létezik.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 9 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

(x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$

$$\begin{pmatrix} -197 & 77 & -16 \\ 110 & -43 & 9 \\ 13 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ $X = \begin{pmatrix} -4 - 3x_{3,1} + 7x_{4,1} & 14 - 3x_{3,2} + 7x_{4,2} \\ 3 + 2x_{3,1} - 5x_{4,1} & -7 + 2x_{3,2} - 5x_{4,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$, ahol $x_{3,1}, x_{4,1}, x_{3,2}, x_{4,2} \in \mathbb{R}$.