

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Σ

NÉV: _____ Neptun kód: _____

A 1.-7. feladatnál csak a végeredményt kell megadni, a 8.-9. feladatnál a teljes számolást (itt lehet részpontot szerezni).

A vizsga időtartama 90 perc. A vizsgán semmiféle segédeszköz nem használható! Etikátlan magatartás elégtelen vizsgajegyet von maga után.

Ponthatárok:

0–47 $\rightsquigarrow$ elégtelen (1),
 48–62 $\rightsquigarrow$ elégséges (2),
 63–75 $\rightsquigarrow$ közepes (3),
 76–86 $\rightsquigarrow$ jó (4),
 87–100 $\rightsquigarrow$ jeles (5).

1. Feladat. (20 pont) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje $\times$ -szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -1 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

- ☐ ☐ Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek véges sok megoldása van.
- ☐ ☐ Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa, v^T a nettó kibocsátás és w^T a bruttó kibocsátás, akkor v komponensei nem nagyobbak, mint w komponensei.
- ☐ ☐ Bármely A és B mátrix esetén, ha $A^T B^T$ létezik, akkor $A + B$ is.
- ☐ ☐ $A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátvektora az $(1, -1, 1)$ vektor.
- ☐ ☐ Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorai rendre $-2, -4, -5$, akkor a kvadratikus alak negatív definit.
- ☐ ☐ Ha egy invertálható mátrix minden eleme egész szám, akkor inverzének minden eleme is egész szám.
- ☐ ☐ Ha a V vektortérben van n -elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor V dimenziója legfeljebb n .
- ☐ ☐ Bármely A négyzetes mátrix esetén $|(AB)^T| = |A| \cdot |B|$.
- ☐ ☐ Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.
- ☐ ☐ Bármely V vektortér és bármely $v_1, v_2 \in V$ vektorok esetén $v_1 \in [v_2, v_1 + v_2]$.

2. Feladat. (4 + 6 pont) Számítsa ki az alábbi determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

3. Feladat. (4 + 6 pont) Határozza meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

v	BÁZIS	KOORDINÁTASOR
$(-2, 4)$	$(2, -6), (1, -2)$	
$(-1, -1, 2)$	$(1, -1, 2), (2, -1, 0), (1, 0, 2)$	

4. Feladat. (2 + 2 + 3 + 3 pont) Döntse el az alábbi vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e (Igen/Nem). Üresen hagyott rubrikát hibás válasznak tekintek!

Vektorrendszer	Lineárisan független	Gen. rendsz.	Bázis
$(1, -1)$			
$(1, -1), (2, 3)$			
$(2, 1, 2), (-1, 1, 2)$			
$(1, -1, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 2), (0, 3, 1)$			

5. Feladat. (4 + 6 pont) Adja meg a következő mátrixokat.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$

6. Feladat. (4 + 6 pont)

(a) Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit. Sajátértékek:

(b) Adja meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 2$ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisát. Bázis:

7. Feladat. (3 + 3 + 4 pont) Definiálja az alábbi fogalmakat, illetve írja le az adott tételt:
Gauss-eliminációnál a bővített mátrix elemi átalakításai:

.....

.....

.....

.....

.....

Mátrixok sorrangja, oszloprangja és determinánsrangja:

.....

.....

.....

.....

.....

A bruttó kibocsátásra meghatározása a Leontief-modell esetén:

.....

.....

.....

.....

.....

Ennek a feladatnak a teljes, kidolgozott megoldását kérem.

8. Feladat. (10 pont) Határozza meg, hogy az a valós paraméter függvényében, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van. (A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!)

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & ax_2 & + & (a^2 + a - 5)x_3 & = & a - 3 \end{array}$$

Ennek a feladatnak a teljes, kidolgozott megoldását kérem.

9. Feladat. (10 pont) Határozza meg az alábbi mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 2 & a^2 & a^2 \\ 2 & 4 & 2a & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$