

12. Előadás

Előszó.

A gyakorlatban felmerülő konkrét problémák általában nem egyszerű lineáris egyenletrendszerekre vezetnek, hanem legtöbbször speciális feltételek is adóttak:

- egyenletek helyett például egyenlőtlenségek szerepelhetnek,
- a változók általában nem negatívak.

Ráadásul legtöbbször nem az összes megoldást keressük, hanem egy bizonyos szempontból optimális megoldást. Ilyen problémák megoldásával foglalkozik az operációkutatás. Mi az operációkutatáson belül, a **lineáris programozással** megoldható feladatokkal fogunk foglalkozni.

Példa.

Egy gyárban 3 féle terméket gyártanak: széket (S), asztalt (A), ajtót (J), melyekhez 2 féle nyersanyag szükséges: faforgács (F) és ragasztó (R). Az egyes termékekhez szükséges nyersanyagmennyiségeket az alábbi mátrix tartalmazza:

$$\begin{array}{c} \text{S} \\ \text{A} \\ \text{J} \end{array} \begin{pmatrix} \text{F} & \text{R} \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A cégnek a székeken 10 Ft, az asztalokon 4 Ft, az ajtókon pedig 3 Ft nyeresége van, míg a raktáraiban 100 egységnyi faforgácsa és 50 egységnyi ragasztója van. Melyik termékből mennyit állítson elő, hogy a profit maximális legyen?

Példa (folyt.).

A probléma az alábbi feladatra vezet: keressük azon x_1, x_2, x_3 valós számokat (most tekintsünk el attól, hogy egészeket keresünk, hiszen az x_i -k a termékek darabszámát jelölik), amelyekre:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

teljesül. Ezen $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ megoldások közül szeretnénk meghatározni egy olyat, amelyre a profit értéke,

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

maximális.

Alapfeladat.

A lineáris programozás az alábbi alakú problémákkal foglalkozik:

$$\begin{array}{rcll}
 a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq (\geq) & b_1 \\
 & & & & & \vdots & \\
 a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq (\geq) & b_m \\
 & & & & x_i & \leq (\geq) & c_i \quad (i \in I) \\
 & & & & x_j & & \in \mathbb{R} \quad (j \in J) \\
 \hline
 c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n & \rightarrow & \min (\max)
 \end{array}$$

Azaz lineáris egyenletek helyett (lineáris) egyenlőtlenségek szerepelnek, valamint némely változókra ($x_i \ (i \in I)$) alsó, illetve felső korlátok adottak, más változókra pedig nincs semmilyen korlát ($x_j \ (j \in J)$). Ezen kívül adott egy függvény (az úgynevezett **célfüggvény**), és olyan megoldást keresünk, amelyre az adott függvény minimális (maximális) értéket vesz fel.

Az Alapfeladat átalakítása.

A probléma megoldásához először átalakítjuk a feltételeket, a következőképpen:

- A jobboldali konstansok legyenek nemnegatívak.
- A többváltozós egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeljenek.
- MINDEN x_ℓ ($\ell \in I \cup J$) változóra egy feltétel vonatkozzon csak:
 $x_\ell \geq 0$.
- A célfüggvényt minimalizálni kelljen (ne maximalizálni).

Az átalakítások legtöbbször természetesen adódnak, nézzünk most néhány példát.

Példa.

- Ha egy egyenlőtlenség jobb oldala negatív, szorozzuk meg -1 -gyel:

$$x_1 - 2x_3 + x_3 \geq -3 \iff -x_1 + 2x_3 - x_3 \leq 3.$$

- Egyenlőtlenségeket új (nemnegatív) változók bevezetésével alakítsunk egyenletté:

•

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \iff x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \quad (x_4 \geq 0),$$

•

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3 \iff x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \quad (x_4 \geq 0).$$

Példa (folyt.).

- Korlát nélküli változókat helyettesítsük két korlátos változó különbségével:

$$x_\ell = y_1 - y_2 \quad (y_1, y_2 \geq 0).$$

- Ha a célfüggvényt maximalizálni kell, akkor szorozzuk meg -1 -gyel:

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \iff -10x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min .$$

Ezen átalakítások előbb-utóbb véget érnek, vagyis ha valamit egy átalakítással kijavítunk, azzal nem rontunk el valami mást. Elvégezve a megfelelő átalakításokat, a feladat speciális alakú lesz: **standard feladat**.

Definíció: standard feladat.

Az alábbi alakú problémát nevezzük **standard feladatnak**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & & & & \vdots & \\
 a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & & & & x_\ell & \geq & 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\
 \hline
 c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n & \rightarrow & \min \text{ (max)}
 \end{array}$$

ahol $b_1, \dots, b_m \geq 0$.

Megjegyzés.

Azaz standard feladat esetén

- MINDEN változóra nemnegativitási feltétel vonatkozik,
- a célfüggvényt MINIMALIZÁLJUK,
- a változókra vonatkozó nemnegativitási feltételek kivételével csak egyenletek szerepelnek, NEMNEGATÍV jobboldallal.

Definíció: Lehetséges kanonikus alakú feladat.

Az alábbi alakú standard feladatokat hívjuk **lehetséges kanonikus alakú feladatoknak** (röviden LKAF):

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & + & a_{11}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_{m+n} & = & b_1 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 x_m & + & a_{m1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{mn}x_{m+n} & = & b_m \\
 & & & & & & x_\ell & \geq & 0 \quad (1 \leq i \leq m+n) \\
 \hline
 & & c_1x_{m+1} & + & \dots & + & c_nx_{m+n} & \rightarrow & \min \text{ (max)}
 \end{array}$$

ahol $b_1, \dots, b_m \geq 0$.

Megjegyzés.

Azaz a LKAF-ban minden egyenlethez tartozik egy változó, amely csak az adott egyenletben szerepel (még a célfüggvényben sem!), és az adott egyenletben az együtthatója 1, ezek az úgynevezett **kiemelt változók** vagy **bázisváltozók**.

Példa (♣).

A következő feladat lehetséges kanonikus alakú feladat:

$$\begin{array}{rccccccccccc}
 -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & 2x_6 & = & 3 \\
 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & - & 3x_6 & = & 4 \\
 3x_1 & & & - & 3x_3 & & & + & x_5 & - & 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 & & \\
 \hline
 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & + & 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

Ugyanis:

$$\begin{array}{rccccccccccc}
 x_2 & & & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_6 & = & 3 \\
 & x_4 & & + & 2x_1 & + & x_3 & - & 3x_6 & = & 4 \\
 & & x_5 & + & 3x_1 & - & 3x_3 & - & 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 & \\
 \hline
 & & & & 2x_1 & + & 3x_3 & + & 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

kiemelt változók/bázisváltozók: x_2, x_4, x_5 .

Megjegyzés.

A LKAF egy fontos jellemzője, hogy könnyen leolvasható belőle az egyenletrendszer egy megoldása, a **bázismegoldás**.

Definíció: **bázismegoldás.**

Bázismegoldásnak nevezzük a LKAF-ban foglalt egyenletrendszer azon megoldását, amikor a kiemelt változók/bázisváltozók az rendre a jobboldali konstansokkal egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel, azaz $x_i = b_i$ ($1 \leq i \leq m$) és $x_j = 0$ ($m + 1 \leq j \leq m + n$).

Példa.

Az (♣) Példa esetén:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_2 & & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_6 & = & 3 \\
 & x_4 & + & 2x_1 & + & x_3 & - & 3x_6 & = & 4 \\
 & & x_5 & + & 3x_1 & - & 3x_3 & - & 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & & 2x_1 & + & 3x_3 & + & 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

a bázismegoldás: $x_2 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_1 = x_3 = x_6 = 0$.

A Szimplex algoritmus.

A módszer lényege, hogy a lehetséges kanonikus alakú feladatokat elemi bázistranszformációk sorozatával oldjuk meg: első lépésként felírjuk a feladat **szimplex tábláját**. A táblázat sorai az egyenleteknek felelnek meg, a sorok címkéi most nem a bázis vektorok, hanem a kiemelt változók/bázisváltozók, a célfüggvény együtthatóit pedig egy külön sorba írjuk.

Példa.

A (♣) Példa:

$$\begin{array}{rclclclclcl}
 x_2 & & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_6 & = & 3 \\
 & x_4 & + & 2x_1 & + & x_3 & - & 3x_6 & = & 4 \\
 & & x_5 & + & 3x_1 & - & 3x_3 & - & 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & & 2x_1 & + & 3x_3 & + & 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

melynek szimplex táblája:

0.	x_1	x_3	x_6	b
x_2	-2	-2	-2	3
x_4	2	1	-3	4
x_5	3	-3	-2	5
z	2	3	5	0

A Szimplex algoritmus (folyt.: az algoritmus vége).

Az algoritmus lényege, hogy a fenti táblázatban megfelelő generáló elemet választva egyre közelebb kerülünk az optimális megoldáshoz.

Az szimplex algoritmus kétféle eredménnyel érhet véget:

- 1 Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható, akkor a bázismegoldás optimális. A célfüggvény optimumának -1 -szerese a jobb alsó sarokban szereplő szám.
- 2 Ha a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

A (♣) Példa LKAF-a az 1. esetre példa.

Példa.

Az

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & - & x_2 & = & 0 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & - & x_2 & \rightarrow \min
 \end{array}$$

LKAF esetén a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát $z(x_1, x_2) = -x_2$ célfüggvény bármilyen kis értéket felvehet. A LKAF szimplex táblája:

0.	x_2	b
x_1	-1	0
z	-1	0

A célfüggvény negatív együtthatója oszlopában nincs pozitív szám, így az előző dián szereplő 2. eset áll fenn.

A Szimplex algoritmus (folyt.: a generáló elem kiválasztása).

A generáló elem kiválasztása többféleképpen történhet, a legegyszerűbb algoritmus:

- Ha a célfüggvénynek nincs negatív együtthatója, vagy van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor az algoritmus véget ért (ld.: „az algoritmus vége” dia).
- Ha nem teljesülnek az előző feltételek, akkor van olyan negatív célfüggvény-együttható, melynek oszlopában szerepel pozitív szám:
 - 1 keressük meg ezen célfüggvény-együtthatók közül a legkisebbet,
 - 2 majd az oszlopában válasszuk azt a pozitív együtthatót generáló elemnek, melynek kiválasztása esetén a jobboldali konstansok egyike sem válik negatívvá, ehhez azt az elemet kell választani, ahol a konstans/együttható hányados a legkisebb lesz.

Példa.

0.	x_4	x_5	x_6	x_7	b	a $b_i/a_{i,j}$ arány
x_1	1	2	1	-1	3	3/1
x_2	-1	0	2	2	4	4/2
x_3	3	-1	3*	1	5	5/3
z	-1	1	<u>-3</u>	2	-2	

⇒ A -3 a legkisebb olyan negatív célfüggvény-együttható, amelynek oszlopában szerepel pozitív szám.

⇒ Az utolsó oszlop tartalmazza a konstans/együttható hányadosokat, ezek közül a 3 -hoz tartozó hányados a legkisebb, így azt választjuk generáló elemnek.

⇒ Ha a -3 oszlopában más generáló elemet választottunk volna, akkor a konstans oszlopban a következő lépésben megjelenének negatív számok.

Generáló elemet addig kell választanunk, míg az algoritmus véget nem ér (ld.: „az algoritmus vége” dia).

Megjegyzés.

- Az algoritmus hibája az, hogy nem feltétlenül ér véget véges sok lépésben szerencsére ez csak úgy fordulhat elő, hogy végtelen ciklusba kerülünk.
- A generáló elem kiválasztásának stratégiájával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen is ciklusok elkerülhetők.

Példa.

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_1 & + & x_3 & & = & 3 \\
 & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & - & 2x_3 & - & x_4 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

0.	x_3	x_4	b		1.	x_1	x_4	b		2.	x_1	x_2	b
x_1	1*	0	3	$\rightsquigarrow$	x_3	1	0	3	$\rightsquigarrow$	x_3	1	0	3
x_2	2	2	8		x_2	-2	2*	2		x_4	-1	1/2	1
z	-2	-1	0		z	2	-1	6		z	1	1/2	7

Nincs negatív célfüggvény-együttható, ezért a bázismegoldás:

$x = (0, 0, 3, 1)^T$ optimális, a célfüggvény értéke ezen a helyen: $z(x) = -7$.

Példa.

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_1 & + & & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 8 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

0.	x_3	x_4	b		1.	x_1	x_4	b
x_1	1*	-1	3	$\rightsquigarrow$	x_3	1	-1	3
x_2	2	-3	8		x_2	-2	-1	2
z	<u>-2</u>	-1	0		z	2	-3	6

Mivel a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, így a célfüggvény alulról nem korlátos, bármilyen kis értéket felvehet.