

6. Előadás

A Leontief-féle Input/Output modell

Példa.

Tegyük fel, hogy egy gazdaság 3 fő ágazatból áll: mezőgazdaság, ipar és szállítás. Az egyes ágazatok 1 egységnyi termék előállításához mindhárom ágazat termékeit felhasználják:

	Egységnyi termékre eső felhasználás		
	Mezőgazdaság	Ipar	Szállítás
Mezőgazdaság	0.30	0.30	0.20
Ipar	0.20	0.10	0.20
Szállítás	0.00	0.20	0.20

a táblázat oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Példa (folyt.).

A fenti gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{array}{c} M \quad I \quad Sz \\ \begin{array}{c} M \\ I \\ Sz \end{array} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \end{array}$$

amelynek oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Definíció: ráfordítási mátrix.

Egy gazdaság egyes ágazatai közötti kapcsolatokat leíró mátrixot a gazdaság **ráfordítási mátrixnak** hívjuk. A ráfordítási mátrix oszlopai mutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Megjegyzés (Row, or column, that is the question.).

- Amennyiben a sorok mutatják, hogy az egyes ágazatoknak mennyi nyersanyagra van szüksége, akkor **mindent** transzponálni kell.
- Mindig tisztában kell lenni azzal, hogy sorokban vagy oszlopokban gondolkodunk!

Példa.

$$\begin{array}{c} M \quad I \quad Sz \\ M \left(\begin{array}{ccc} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ I \left(\begin{array}{ccc} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ Sz \left(\begin{array}{ccc} 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Ha 1 egységnyi M , 3 egységnyi I és 2 egységnyi Sz terméket szeretnénk legyártani, akkor mennyi termékre van szükség? Például az M termékből

$$1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 = 1.7$$

egységnyi szükséges, azonban ezen termékeket is elő kell állítani, és ahhoz szintén valamennyi terméket fel kell használni, stb.

Nettó és bruttó kibocsátás

Definíció: **nettó kibocsátás.**

Az a termékmennyiség, amelyet az adott gazdaságnak elő kell állítania (felfogható megrendelésként).

Definíció: **(nettó kibocsátáshoz tartozó) bruttó kibocsátás.**

Az a termékmennyiség, amelyet a gazdaságnak ÖSSZESEN elő kell állítania ahhoz, hogy a nettó kibocsátást elő tudja állítani.

Probléma.

Hogyan lehet meghatározni a bruttó kibocsátást?

Definíció: A Leontief-féle Input/Output modell.

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, amely n darab ágazatot foglal magában és ráfordításai mátrixa $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor

$$\underbrace{x}_{\text{bruttó kibocsátás}} = \underbrace{Cx}_{\text{közbulső kibocsátás}} + \underbrace{d}_{\text{nettó kibocsátás}},$$

$$\text{ahol } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés (a Leontief-féle Input/Output modellhez).

Mivel $x = E_n x$, ezért

$$\begin{aligned}x = Cx + d &\iff E_n x = Cx + d \\&\iff E_n x - Cx = d \\&\iff (E_n - C)x = d \\&\iff x = (E_n - C)^{-1}d,\end{aligned}$$

ha $E_n - C$ invertálható.

Definíció: Leontief-inverz.

Legyen $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az $E_n - C$ mátrix inverzét, amennyiben létezik, a C mátrix **Leontief-inverzének** nevezzük.

Megjegyzés (a lehetséges ideológia az elmélet mögött).

	Elérendő kibocsátás	Szükséges termékm.
1. kör	d	Cd
2. kör	Cd	$C(Cd) = C^2d$
3. kör	C^2d	$C(C^2d) = C^3d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ekkor az x bruttó kibocsátás:

$$\begin{aligned} x &= d + Cd + C^2d + \dots \\ &= (E + C + C^2 + \dots)d. \end{aligned}$$

Mivel

$$(E - C)(E + C + C^2 + \dots + C^m) = E - C^{m+1},$$

ezért

$$(E - C)^{-1} \approx E + C + \dots + C^m,$$

ha a C mátrixnak létezik a Leontief inverze, és $C^m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

Példa.

Tekintsük az első Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}. \text{ Ekkor } C\text{-nek létezik Leontief-inverze}$$

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 \\ 0.0 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Az $E_3 + C + \dots + C^m$ ($m = 1, 2, 4, 8$) mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{pmatrix} 1.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 1.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.45 & 0.46 & 0.36 \\ 0.28 & 1.21 & 0.30 \\ 0.04 & 0.26 & 1.28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.57 & 0.60 & 0.51 \\ 0.35 & 1.23 & 0.39 \\ 0.08 & 0.31 & 1.33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.61 & 0.66 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.09 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Tétel.

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $x = Cx + d$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $d \geq 0$ esetén $x \geq 0$ megoldása, ha $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \rightarrow 0$, ha $m \rightarrow \infty$.

Definíció: működőképesség.

Ha $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, ahol az $x = Cx + d$ egyenletnek tetszőleges $d \geq 0$ esetén van $x \geq 0$ megoldása, azaz $\mathcal{G}$ tetszőleges megrendelést ki tud elégíteni (elméletileg), akkor **működőképesnek** nevezzük.

Megjegyzés.

Feladatmegoldásnál a működőképesség vizsgálatánál csak azt ellenőrizzük, hogy teljesül-e, hogy az $(E - C)^{-1}$ Leontief-inverz minden eleme nemnegatív.

Tétel.

Legyen C egy gazdaság ráfordítási mátrixa, d a nettó kibocsátás vektora. Ha C és d minden komponense nemnegatív, valamint a gazdaság működképes, akkor az x **bruttó kibocsátás**:

$$x = (E - C)^{-1}d,$$

ezen (oszlop)vektor minden komponense nemnegatív, és x az egyetlen megoldása az $x = Cx + d$ egyenletnek.

Példa.

Tekintsük az első Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad (E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix},$$

tehát a gazdaság működőképes. Ha 1 egységnyi M , 3 egységnyi I és 2 egységnyi S_z terméket szeretnénk legyártani, akkor a nettó kibocsátás a $d^T = (1, 3, 2)$ vektorral adható meg. Határozzuk meg a bruttó kibocsátást:

$$x = (E_3 - C)^{-1}d = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.62 + 2.01 + 1.14 \\ 0.38 + 3.99 + 0.86 \\ 0.10 + 0.99 + 2.72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.77 \\ 5.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

- Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixának Leontief-inverze tartalmaz negatív elemet, akkor a gazdaság nem működőképes: adott termékmennyiség előállításához összességében végtelen sok terméket fogyasztana el.
- Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.1 & 0.1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

akkor a gazdaság nem működőképes, hiszen ...

Példa.

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a $d = (1 \ 1 \ 1)^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó összkibocsátást.

A C mátrix Leontief-inverze:

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.6 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.).

Így a bruttó kibocsátás vektora:

$$(E_3 - C)^{-1}d = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.625 \\ 46.875 \\ 46.25 \end{pmatrix}.$$

Példa.

Működőképes-e az a gazdaság, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} ?$$

Meghatározzuk C Leontief-inverzét.

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -295.71 & -320 & -264.29 \\ -232.86 & -250 & -207.14 \\ -185.71 & -200 & -164.29 \end{pmatrix}$$

A gazdaság nem működőképes.

Példa.

Változtassuk meg egy kicsit a ráfordítási mátrixot és vizsgáljuk, hogy mennyire változik a végeredmény (ez az úgynevezett érzékenység-vizsgálat). Esetünkben a helyzet menthető. Legyen

$$C' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & \mathbf{0.17391} \end{pmatrix} \quad \left[C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} \right].$$

Ekkor

$$(E_3 - C')^{-1} = \begin{pmatrix} 597\,519. & 643\,480. & 528\,571. \\ 468\,324. & 504\,350. & 414\,286. \\ 371\,429. & 400\,000. & 328\,571. \end{pmatrix}.$$

A gazdaság így működőképes, de nem túl hatékonyan működik, hiszen 1-1 megrendelt termék előállításához gondoljuk meg, hogy mennyi köztes termék kell...

Megjegyzés (néhány kérdés a ráfordítási mátrixszal kapcsolatban).

- Működőképes-e a gazdaság?
- Adott termékmennyiség előállítása során mennyi terméket kell legyártani?
- Ha az árak ismertek, hogy lehet meghatározni az egyes ágazatok profitját?
- Milyen árak mellett lehet az összprofitot maximalizálni?
- Milyen egyensúlyi helyzetei vannak a gazdaságnak?

Költség és profit

Példa (♠).

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix},$$

és legyen az ágazatok termékeinek árvektora

$$v = (1 \ 2 \ 3)$$

(azaz, az első termék 1, a második 2, a harmadik pedig 3 egységbe kerül).
Határozzuk meg az egyes ágazatok egységnyi termékének előállításakor keletkező költséget.

Példa (folyt. (♠)).

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad v = (1 \ 2 \ 3).$$

Világos, hogy az első, második, illetve harmadik ágazat egységnyi termékének előállításakor rendre

$$1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 = 1.6,$$

$$1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 = 1.7,$$

$$1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 = 1.6$$

egységnyi kiadás keletkezik.

Tétel.

Ha C egy gazdaság ráfordítási mátrixa és v az árvektor, akkor az egyes ágazatok **költségeit** a vC vektor tartalmazza. A **profit(vektor)** pedig $v - vC = v(E - C)$.

Példa (folyt. (♠)).

Az előbbi példában a profitvektor:

$$v(E_3 - C) = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = (-0.6 \quad 0.3 \quad 1.4),$$

ami azt mutatja, hogy a második és harmadik ágazat nyereséges, az első ágazat pedig veszteséges.

Definíció: produktív gazdaság.

A $\mathcal{G}$ gazdaság **produktív**, ha minden ágazatban keletkezik hozzáadott érték, minden ágazat realizál profitot.

Tétel (Produktivitás).

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor ha a $\mathcal{G}$ gazdaság működőképes, akkor meg lehet úgy határozni a v árvektort, hogy $v(E_n - C)$ minden komponense pozitív legyen, azaz minden ágazat nyereséges, tehát a gazdaság produktív.

Példa.

Ha a (♠) Példánkban az árvektort $v' = (2 \ 2 \ 2.9)$, akkor már minden ágazat nyereséges lesz:

$$v'(E_3 - C) = (2 \ 2 \ 2.9) \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.02 \ 0.04 \ 1.12).$$

Míg a v árvektorral a gazdaság nem volt produktív, a v' árvektorral produktív lett.

A C mátrix Leontief-inverze:

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.8 & 1.7 \\ 1.8 & 2.4 & 1.7 \\ 1.7 & 1.7 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

Vektorterek

Definíció: Valós szám- n -esek halmaza.

Legyen n természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám- n -eseknek** nevezzük:

$$a = (a_1, \dots, a_n)^T,$$

ahol $a_1, \dots, a_n$ valós számok. Tetszőleges i indexre ($1 \leq i \leq n$) a_i az a valós szám- n -es i -edik **komponense**.

Példa.

- $\mathbb{R}^2$ a valós számpárok halmaza, pl.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, 2)^T$, $(3, \sqrt{2})^T$,
- $\mathbb{R}^3$ a valós számhármások halmaza, pl.: $\begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ \sin \frac{\pi}{16} \end{pmatrix} = (\pi, \sqrt{3}, \sin \frac{\pi}{16})^T$.

Definíció: Valós szám- n -esek egyenlősége.

Az $(a_1, \dots, a_n)^T$ és $(b_1, \dots, b_n)^T$ valós szám- n -esek pontosan akkor egyenlők, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz

$$(a_1, \dots, a_n)^T = (b_1, \dots, b_n)^T \stackrel{\text{def.}}{\iff} a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Példa.

$$(-1, 2)^T \neq (-1, 2, 3)^T,$$

$$(-1, 2, 3.14)^T \neq (-1, 2, \pi)^T,$$

$$(6, 28, 496, 8128)^T = (2(2^2 - 1), 2^2(2^3 - 1), 2^4(2^5 - 1), 2^6(2^7 - 1))^T.$$

Definíció: vektorok összeadása és skalárral való szorzás.

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az összeadást, és a skalárokkal (= valós számokkal) történő szorzást a következő módon. Ha $(a_1, \dots, a_n)^T, (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n)^T + (b_1, \dots, b_n)^T &\stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)^T \\ \alpha \cdot (a_1, \dots, a_n)^T &\stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)^T.\end{aligned}$$

Példa.

$$\begin{aligned}(1, \sqrt{2} - 1, 3, 0.4)^T + (2, 1, 0, -1.2)^T &= (3, \sqrt{2}, 3, -0.8)^T, \\ 0 \cdot (1, -1, \sqrt{2}, \pi)^T &= (0, 0, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

Definíció: Valós vektortér.

Az így kapott $(\mathbb{R}^n; +, \alpha \cdot (\alpha \in \mathbb{R}))$ struktúrát nevezzük a **(valós) szám- n -esek vektorterének**.

Jelölés.

- **Vektortér:** $V, U, \dots$; elemei a vektorok $(u, v, w, \dots)$.
- **Skalárok:** $\mathbb{R}$ elemei $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Definíció: Zérusvektor.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér csupa 0 -ból álló vektorát zérusvektornak nevezzük, és $\underline{0}$ -val jelöljük, $\underline{0} = (0, \dots, 0)^T$.

Tétel (a valós szám- n -esek vektorterének elemi tulajdonságai).

Legyen $V = \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges $u, v, w \in V$ vektorra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

- 1 $u + v = v + u$ (a vektorok összeadása kommutatív),
- 2 $(u + v) + w = u + (v + w)$ (a vektorok összeadása asszociatív),
- 3 $\underline{0} + u = u + \underline{0} = u$,
- 4 $(-1) \cdot u + u = u + (-1) \cdot u = \underline{0}$,
- 5 $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
- 6 $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
- 7 $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
- 8 $1 \cdot u = u$.

Tétel.

Tetszőleges $v \in V$ vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalárra $\alpha \cdot v = \underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 0$ vagy $v = \underline{0}$.