

4. Előadás

Definíció: elemi átalakítások (mátrixokra).

Mátrixok **elemi átalakításai** a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

Definíció: mátrixok lépcsős alakja.

Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor **lépcsős alakú**. Tegyük fel, hogy a nem a zérusmátrix. Ekkor A **lépcsős alakú**, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1 -edik és i_2 -edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
 - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
 - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

Tétel.

Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során **CSAK a SOROKON** végezhetők átalakítások, az **OSZLOPOKON NEM**.



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

LER általános megoldása:

- a LER bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk Gauss-eliminációval,
- pontosan akkor nincs megoldás, ha lépcsős alak tartalmaz ellentmondó sort (ld. előző előadás),
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad változója,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad változója,
- ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakból.

Tétel (LER általános megoldása).

Ha a LER bővített mátrixának lépcsős alakja nem tartalmaz ellentmondó sort, akkor van megoldása az egyenletrendszernek. Ha a bővített mátrix vezéregyesei rendre a $j_1 < \dots < j_r$ oszlopokban vannak, akkor az $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ ismeretlenek lesznek kötöttek, a többi ismeretlen pedig szabad. Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & a'_{1(j_1+1)} & \dots & 0 & a'_{1(j_r+1)} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array} \right),$$

akkor ...

Tétel (LER általános megoldása).

... Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & a'_{1(j_1+1)} & \dots & 0 & a'_{1(j_r+1)} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array} \right),$$

akkor

$$x_{j_1} = b'_1 - a'_{1(j_1+1)}x_{j_1+1} - \dots - a'_{1m}x_m,$$

$$\vdots$$

$$x_{j_r} = b'_r - a'_{r(j_r+1)}x_{j_r+1} - \dots - a'_{rm}x_m.$$

Ne felejtjük el, hogy a vezéregyesek felett 0-ák állnak!

Példa.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol λ valós paraméter.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array} \right).$$

Példa (folyt.).

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array} \right).$$

- Ha $\lambda \neq 5$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, mivel van ellentmondó sor. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{array} \right).$$

Példa (folyt.).

- Ha $\lambda = 5$, akkor van megoldás. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Két kötött (x_1, x_2) és két szabad (x_3, x_4) ismeretlen van. Az általános megoldás:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

valós számnégyesek halmazaként pedig:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \quad \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, \quad x_3, \quad x_4 \right)^T,$$

ahol x_3 és x_4 tetszőleges valós számok.

Példa (folyt.).

Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & 5. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy általános megoldása:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4 \right)^T \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldását úgy kapjuk meg, hogy a szabad változóknak (konkrét) értéket adunk. Legyen $x_3 = 9$ és $x_4 = 25$, ekkor $x_1 = -31$ és $x_2 = -29$, a konkrét megoldás ekkor:

$$(-31, -29, 9, 25)^T.$$

Elemi bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} & & x_2 & & - & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & & & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & = & -2. \end{array} \right.$$

Elemi bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 & \textcolor{red}{x_2} & & -x_4 & -x_5 & = & 0, \\ & & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & & & = & -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_2 -t: $x_2 = x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_1 & & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ x_1 & & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & & - 5x_4 & - 6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & - 5x_4 & - 6x_5 & = & 0, \\ \textcolor{red}{x_1} & - x_3 & - x_4 & - x_5 & = & -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki a harmadik egyenletből x_1 -et: $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_3 & - 3x_4 & - 4x_5 & = & 4, \\ 3x_3 & - 5x_4 & - 6x_5 & = & 0. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből x_3 -at: $x_3 = 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5$, majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_4 & = & -6. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldását megkaptuk:

$$x_4 = 12,$$

$$x_3 = 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 = 20 + 2x_5,$$

$$x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 + 3x_5,$$

$$x_2 = x_4 + x_5 = 12 + x_5,$$

ahol x_5 tetszőleges valós szám.

A végrehajtott eljárás több előnnyel is bír:

- meglehetősen természetes módja az egyenletrendszer megoldásának,
- tömör és jól áttekinthető formában is végrehajtható.

Az eljárás neve: **Elemi Bázistranszformáció**, amelynek során az új egyenletrendszer együtthatóit fogjuk ügyesen számolni.

Foglaljuk táblázatba az

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{n1} + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

egyenletrendszer együtthatóit:

0.	x_1	$\dots$	x_m	b
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nm}	b_n

0.	x_1	$\dots$	x_m	b
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nm}	b_n

Az alábbi lépéseket hajtsuk végre:

- a **generáló elem** választása: az együtthatók közül választunk egy 0-tól különbözőt (pl.: a_{ij} -t, ami annak felel meg, hogy az i -edik egyenletből fejezzük ki x_j -t), a generáló elemet $*$ -gal megjelöljük (a_{ij}^*),
- az x_j -hez tartozó oszlopot töröljük és a következő átalakításokat hajtjuk végre:
 - e_i helyébe x_j kerül (a generálóelemet e jelű sorból kellett választani),
 - az i -edik sor minden elemét osztjuk a_{ij} -vel,
 - az új táblázat többi elemét pedig a **Téglalap-szabállyal** számítjuk ki (a konstansok b oszlopában is).

A „Téglalap-szabály”

A téglalap-szabály segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem (d) a generáló elemmel együtt (a) egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	b	.	d	.
e_2	.	.	.	.
e_3	a^*	.	c	.

Ebben az esetben az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

Elemi bázistranszformáció: $a_{ij}^* \neq 0$

k.	...	x_v	...	x_j	...	b
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
e_u	...	a_{uv}	...	a_{uj}	...	b_u
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
e_i	...	a_{iv}	...	a_{ij}^*	...	b_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

$$a'_{iv} = a_{iv} / a_{ij}^*,$$

$$b'_i = b_i / a_{ij}^*,$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*} = \frac{a_{uv}a_{ij}^* - a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*},$$

ha $u \neq i$,

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a_{ij}^*} = \frac{b_u a_{ij}^* - a_{uj}b_i}{a_{ij}^*},$$

ha $u \neq i$.

Az új táblázat:

$(k+1).$	...	x_v	...	x_{j-1}	x_{j+1}	...	b
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_u	...	a'_{uv}	...	$a'_{u(j-1)}$	$a'_{u(j+1)}$	...	b'_u
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_j	...	a'_{iv}	...	$a'_{i(j-1)}$	$a'_{i(j+1)}$	...	b'_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

$$a'_{iv} = a_{iv} / a_{ij}^*,$$

$$b'_i = b_i / a_{ij}^*$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*} = \frac{a_{uv}a_{ij}^* - a_{uj}a_{iv}}{a_{ij}^*},$$

ha $u \neq i$,

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a_{ij}^*} = \frac{b_u a_{ij}^* - a_{uj}b_i}{a_{ij}^*},$$

ha $u \neq i$.

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
e_1	0	1	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

Példa (folyt.).

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} & & x_2 & & - & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & & & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & = & -2. \end{array} \right.$$

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
e_1	0	1^*	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

Példa (folyt.).

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
e_1	0	1^*	0	-1	-1	0
e_2	2	0	0	-5	-6	0
e_3	0	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	0	0	-2

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	0	-1	-1	0
e_2	2	0	-5	-6	0
e_3	0	3	-5	-6	0
e_4	1	-1	-1	-1	-2

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 & & -5x_4 - 6x_5 = 0 \\ & 3x_3 & -5x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_1 & -x_3 & -x_4 - x_5 = -2 \end{array} \right.$$

Példa (folyt.).

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	0	-1	-1	0
e_2	2	0	-5	-6	0
e_3	0	3	-5	-6	0
e_4	1^*	-1	-1	-1	-2

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 \\ \quad \quad \quad 3x_3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ - x_3 - x_4 - x_5 = -2. \end{array}$$

Példa (folyt.).

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	0	-1	-1	0
e_2	2	0	-5	-6	0
e_3	0	3	-5	-6	0
e_4	1^*	-1	-1	-1	-2

2.	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa (folyt.).

2.	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2^*	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

Példa (folyt.).

2.	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	-1	-1	0
e_2	2^*	-3	-4	4
e_3	3	-5	-6	0
x_1	-1	-1	-1	-2

3.	x_4	x_5	b
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\{ \quad -1/2x_4 = -6,$$

Példa (folyt.).

3.	x_4	x_5	b
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2^*$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

$$\{ \textcolor{red}{-1/2}x_4 = -6,$$

Példa (folyt.).

3.	x_4	x_5	b
x_2	-1	-1	0
x_3	$-3/2$	-2	2
e_3	$-1/2^*$	0	-6
x_1	$-5/2$	-3	0

4.	x_5	b
x_2	-1	12
x_3	-2	20
x_4	0	12
x_1	-3	30

$$x_1 = 30 + 3x_5, \quad x_2 = 12 + x_5, \quad x_3 = 20 + 2x_5, \quad x_4 = 12,$$

az x_5 ismeretlen értéke tetszőlegesen megválasztható. Figyeljünk az előjelváltásra!

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van **ellentmondó sor**, ami a következő alakú:

	x_{j_1}	$\dots$	x_{j_k}	b
$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
e_i	0	$\dots$	0	$c \neq 0$
$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$

Megjegyzés.

Fontos: az ellentmondó sor elején e_i -nek kell szerepelnie!!!

Gauss-elimináció vs Elemi bázistranszformáció

Példa.

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17 \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3 \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

Megjegyzés.

A két módszer (GE és EBT) lényegében ugyanaz, de mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

Példa (folyt.).

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17 \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3 \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Gauss-eliminációval.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array} \right)$$

$$(-2) \cdot [1.] + [2.], [1.] \leftrightarrow [2.]$$

$$(-11) \times [1.] + [2.], (-41) \times [1.] + [3.]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array} \right)$$

Példa (folyt.).

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 (-11) \times [1.] + [2.], \quad (-41) \times [1.] + [3.] \\
 (-4) \times [2.] + [3.] \\
 [2.] \cdot (-1/20), \quad [3.] \cdot (-1/30) \\
 \ddots
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\ 0 & 0 & -30 & -26 & -153 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & -179/10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -103/20 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Példa (folyt.).

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17, \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3, \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Elemi bázistranszformációval.

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	b
e_1	11*	13	17	19	17
e_2	23	29	31	37	3
e_3	41	43	47	53	8

1.	x_2	x_3	x_4	b
x_1	13/11	17/11	19/11	17/11
e_2	20/11*	-50/11	-30/11	-358/11
e_3	-60/11	-180/11	-196/11	-609/11

2.	x_3	x_4	b
x_1	$9/2$	$7/2$	$227/10$
x_2	$-5/2$	$-3/2$	$-179/10$
e_3	-30	-26^*	-153

3.	x_3	b
x_1	$6/13$	$547/260$
x_2	$-10/13$	$-2359/260$
x_4	$15/13$	$153/26$

Gauss-elimináció

Előny:

- Nincs vezéregyes!?
Akkor csinálunk!

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

Elemi Bázistranszformáció

Előny:

- A generáló elem tetszőleges 0-tól különböző elem lehet, nem szükséges az első lépésben az első oszloppal dolgozni.
- Lehetőségünk van a kötött változók „befolyásolására”.

Hátrány:

- Sokat kell számolni.