

Lineáris algebra

(10A103)

Dr. Kátai-Urbán Kamilla

Honlap: <https://www.math.u-szeged.hu/~katai/linalkg23/linalea23.html>

Jegyzet:

Dormán Miklós, Kátai-Urbán Kamilla: Előadásvázlat

https://www.math.u-szeged.hu/~katai/Linalkg_jegyzet/LinAlgGTK-Elm.pdf

Megyesi László: Lineáris algebra, Polygon (2007)

Követelmények (előadás)

A legalább közepes (3) gyakorlatijegy megajánlott vizsgajegyként is elfogadható*.

A vizsga írásban fog történni, a vizsgadolgozat 100 pontos.

Ponthatárok:

[0, 47]	↪	elégtelen (1)
[48, 62]	↪	elégséges (2)
[63, 75]	↪	közepes (3)
[76, 86]	↪	jó (4)
[87, 100]	↪	jeles (5)

* Az ebben a félévben megszerzett gyakorlati jegyek estén érvényes, ha a Hallgató nem a gyakorlati utóvizsga alapján kapta.

Követelmények (gyakorlat)

- **Gyakorlat:** 100 pontot lehet elérni.
- $90 = 45 + 45$ pont két zárthelyi dolgozatból.
- További 10 pontot szerezhetnek a gyakorlatokon, a gyakorlatvezetőjük által megadott módon.
- A ponthatárok megegyeznek a vizsga ponthatárával.
- Az egyik zárthelyi dolgozat javítható vagy pótolható.
- Az elégtelen (1) gyakorlati jegy gyakorlati utóvizsgán javítható a félév teljes anyagából írt dolgozattal.
- A zárthelyi dolgozatok időpontjai:
 - 1. zárthelyi dolgozat: **2023. március 20-24.** a gyakorlaton.
 - 2. zárthelyi dolgozat: **2023. május 8-12.** a gyakorlaton.
 - Pót/Javító dolgozat: **2023. május 15-19.** héten.
 - Gyakorlati utóvizsga: **2023. május 22-26.** héten.

1. Előadás

Mátrixok

Definíció: mátrix.

Mátrixon, pontosabban $(n \times m)$ -es valós mátrixon egy

- kerek zárójelek között elhelyezkedő,
- „táblázatot” értünk, melynek n sora és m oszlopa van,
- elemei pedig $\mathbb{R}$ elemei, azaz **valós** számok.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

Megjegyzés.

- A *mátrixokat* általában nagybetűkkel jelöljük ($A, B, C, \dots$). Az $A \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- *Mátrix elemei*: a B mátrix i -edik sorának j -edik elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet $(B)_{ij}$ -vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$\mathbb{R}^{n \times m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$)
 ($\mathbb{R}$ feletti $(n \times m)$ -es mátrixok halmaza)

$$i \begin{pmatrix} & j \\ & \vdots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ & \vdots \end{pmatrix}$$

Példa.

Sütőde „termelési” mátrixa

	liszt (kg)	víz (l)	só (dkg)	energia (kWh)
kenyér (1 kg)	0.8	0.3	3.0	2.4
kifli (8 db)	0.6	0.2	2.0	2.0
zsemle (12 db)	0.8	0.3	2.0	1.9

Sütőde „árfolyam” mátrixa

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt (Ft/kg)	400	380	420
víz (Ft/l)	25	22	23
só (Ft/dkg)	6	7	6
energia (Ft/kWh)	60	58	56

Mennyibe került 1 kg kenyér előállítása december 1-én?

	liszt (kg)	víz (l)	só (dkg)	energia (kWh)
kenyér	0.8	0.3	3.0	2.4
kifli	0.6	0.2	2.0	2.0
zsemle	0.8	0.3	2.0	1.9

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt	400	380	420
víz	25	22	23
só	6	7	6
energia	60	58	56

Egy kenyér előállítása december 1-én

$$0.8 \cdot 400 + 0.3 \cdot 25 + 3.0 \cdot 6 + 2.4 \cdot 60 = 489.5$$

Ft-ba került.

	liszt	víz	só	energia		dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
kenyér	0.8	0.3	3.0	2.4	liszt	400	380	420
kifli	0.6	0.2	2.0	2.0	víz	25	22	23
zsemle	0.8	0.3	2.0	1.9	só	6	7	6
					energia	60	58	56

Hasonlóképpen számíthatóak ki a következő táblázat elemei.

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
kenyér (1 kg)	489.5	470.8	495.3
kifli (8 db)	377.0	362.4	380.6
zsömle (12 db)	453.5	434.8	461.3

Mátrixszorzás

Definíció: mátrixok szorzása — egzisztencia.

Ha A $(n \times m)$ -es, B pedig $(m \times k)$ -s mátrix, akkor létezik a szorzatuk, $A \cdot B$, amely $(n \times k)$ -s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

Definíció: mátrixok szorzása — a szorzata elemei.

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i -edik sorának j -edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i -edik sorának elemeit B j -edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott számokat összeadjuk. („Az A -beli sor és B -beli oszlop skalárisszorzata.”)

Példa.

$$\text{Ha } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \text{ és } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \text{ akkor } AB \text{ és } BA \text{ is}$$

létezik, de különböző méretűek.

Az AB mátrix 2-dik sorának 3-adik eleme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{9} & \color{red}{27} \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \color{blue}{1} \\ 1 & -1 & \color{blue}{1} \\ 1 & -2 & \color{blue}{4} \\ 1 & -3 & \color{blue}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -33 & 94 \\ 40 & -101 & \boxed{286} \\ 156 & -429 & 1234 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{1} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{3} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{9} \cdot \color{blue}{4} + \color{red}{27} \cdot \color{blue}{9} = 286.$$

Definíció: mátrixszorzás.

Legyen A $(n \times m)$ -es, B pedig $(m \times k)$ -s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{j1}} & \textcolor{red}{a_{j2}} & \dots & \textcolor{red}{a_{jm}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \textcolor{green}{b_{1j}} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & \textcolor{green}{b_{2j}} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & \textcolor{green}{b_{mj}} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $(n \times k)$ -s, i -edik sorának j -edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = \textcolor{red}{a_{i1}} \textcolor{green}{b_{1j}} + \textcolor{red}{a_{i2}} \textcolor{green}{b_{2j}} + \dots + \textcolor{red}{a_{im}} \textcolor{green}{b_{mj}} = \sum_{t=1}^m \textcolor{red}{a_{it}} \cdot \textcolor{green}{b_{tj}}.$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik.).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ NEM LÉTEZIK.}$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek.).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3).$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők.).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mátrixok összeadása

Definíció: mátrixok összegének létezése.

Ha az A és B mátrixok $(n \times m)$ -es mátrixok, akkor összeadhatók. Az összegük is $(n \times m)$ -es mátrix lesz. Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

Definíció: mátrixok összege.

Az összegmátrix i -edik sorának j -edik eleme A i -edik sora j -edik elemének és B i -edik sora j -edik elemének az összege:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 + 2, & c_{12} &= (-2) + (-1), \\ c_{21} &= 3 + 0, & c_{22} &= 4 + 1, \\ c_{31} &= 2 + 2, & c_{32} &= 1 + 4. \end{aligned}$$

Mátrix szorzása skalárral

Megjegyzés.

Skalár = valós szám

Definíció: mátrix skalárszorosa — egzisztencia.

Mindig létezik.

Definíció: mátrix szorzása skalárral.

Az A mátrixot úgy szorzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ -val:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Példa.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$ -es mátrix transzponáltja $(m \times n)$ -es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$ -es mátrix transzponáltja $(m \times n)$ -es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$ -es mátrix transzponáltja $(m \times n)$ -es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$ -es mátrix transzponáltja $(m \times n)$ -es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tétel.

Legyenek A, B és C valós mátrixok. Valahányszor az alábbi egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + B = B + A$;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Jelölés.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

Definíció: szimmetrikus mátrix.

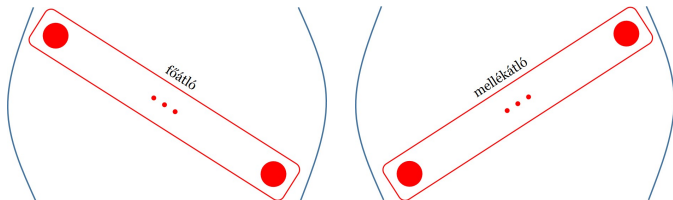
Az A mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$ -es. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix **főátlóját** az $a_{11}, \dots, a_{nn}$ elemek alkotják.



Definíció: **trianguláris mátrix.**

Egy $(n \times n)$ -es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa.

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
 (felső trianguláris mátrix),

- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
 (alsó trianguláris mátrix).

Definíció: diagonális mátrix.

Az $(n \times n)$ -es A mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definíció: egységmátrix.

Az $(n \times n)$ -es egységmátrix az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n .

Példa.

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

Definíció: zérómátrix.

Az $(n \times n)$ -es zérómátrix az a mátrix, amelynek minden eleme 0. Jele: Z_n vagy 0_n .

Példa.

$$Z_1 = (0), \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

Igaz vagy Hamis?

- Nem léteznek olyan A és B mátrixok, amelyekre $AB = BA$.

Hamis, pl: $A = E_n$ -re és tetszőleges B ($n \times n$)-es mátrixokra teljesül.

- A 3×3 -as zérómátrix diagonális mátrix.

Igaz, a főátló alatt és felett minden elem 0.