

1. Feladat. Döntse el, hogy az U részhalmaz alteret alkot-e $V = \mathbb{R}^3$ vektortérben.

- (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Nem altere V -nek, mivel $\underline{0} \notin U$.
(b) Altere V -nek.

2. Feladat. Döntse el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsa elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

- (a) $v = (1, 2, 5, 2)$, $U = [(-1, 0, 1, 2), (0, 1, 3, 2)]$;
(b) $v = (2, 0, 2, 2)$, $U = [(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 8)]$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $v \in U$ és $v = (-1) \cdot (-1, 0, 1, 2) + 2 \cdot (0, 1, 3, 2)$;
(b) $v \notin U$.

3. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszereinek rangját, és döntse el, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

- (a) $(2, -3, -2, 3), (1, -2, -1, 0), (-1, 2, 1, -2), (0, 1, 0, -3)$;
(b) $(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

- (a) A vektorrendszer rangja 3, lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
(b) A vektorrendszer rangja 4, lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

4. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V = \mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

$$(1, -1, 2, 3), (2, -1, 3, 7), (1, -1, a^2 + a, 4), (1, -1, 2, a^2 + 2)$$

(x pont)

MEGOLDÁS. A vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független/generátorrendszer/bázis, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$.

5. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének dimenzióját, valamint adjon meg benne bázist.

- (a) $U = [(-4, -1, 1, -3), (5, 4, 7, 12), (1, 1, 2, 3), (2, 1, 1, 3)]$;
(b) $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 3), (1, 4, 5, 8), (5, 8, 13, 21)]$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\dim(U) = 2$, egy bázis U -ban: $(1, 1, 2, 3), (2, 1, 1, 3)$;

(b) $\dim(U) = 3$, egy bázis U -ban: $(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 3), (1, 4, 5, 8)$.

6. Feladat. Adja meg a v vektor koordinátságait a V vektortér megadott bázisában:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1, 3)$, bázis: $(-2, 3), (1, 0)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (3, 0, 1)$, bázis: $(1, -2, 1), (3, 0, -1), (3, 3, 3)$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $v = 1 \cdot (-2, 3) + 3 \cdot (1, 0)$, így v koordinátságai $(1, 3)$;

(b) $v = \frac{1}{2} \cdot (1, -2, 1) + \frac{1}{2} \cdot (3, 0, -1) + \frac{1}{3} \cdot (3, 3, 3)$, így v koordinátságai $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

7. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját, valamint adjon meg bennük egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $r(A) = 1$, $|1| \neq 0$;

(b) $r(B) = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

8. Feladat. Határozza meg az A mátrix rangját az a valós paraméter függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a^2 + a & 2 \\ 3 & 7 & 4 & a^2 + 2 \end{pmatrix}$$

(x pont)

MEGOLDÁS.

Az A mátrix rangja 3, ha $a \in \{-2, -1, 1\}$; minden más esetben 4 a rang.

9. Feladat. Adjon meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

(x pont)

MEGOLDÁS.

Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$U = \{(-1/2x_4 - 10/3x_5, -x_4 - 1/3x_5, -1/2x_4 + 5/3x_5, x_4, x_5) : x_4, x_5 \in \mathbb{R}\},$$

a megoldáster egy bázisa:

$$(-1/2, -1, -1/2, 1, 0), (-10/3, -1/3, 5/3, 0, 1).$$

10. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$;

(b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

11. Feladat. Adjon meg bázist az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = 2;$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 1.$

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $(-1, 0, 1), (-1, 2, 0);$

(b) $(1, 0, 1), (-2, 1, 0).$

Megjegyzés: Akár a 10.(a) és 11.(b) feladat együtt is alkothat egy zh feladatot.

12. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

(a) $V = \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3;$ (b) $V = \mathbb{R}^2, \quad 2x_1^2 + 2x_2x_1 + 13x_2^2.$

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) pozitív szemidefinit, kanonikus alak: y_1^2 ;

(b) pozitív definit, kanonikus alak: $y_1^2 + y_2^2$.

13. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje $\times$ -szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -2 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

☐ ☐ Ha $U = \{v\}$ altere a V valós vektortérnek, akkor U dimenziója 1. (Hamis)

☐ ☐ Ha a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 2, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független. (Hamis)

(4 pont)

14. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes. Jelölje $\times$ -szel, amelyik helyes. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz vagy nincs válasz, 0 pont.)

(a) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorrendszert,...

☐ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

☐ ha a vektorrendszer rangja $r = k$, akkor a vektorrendszer bázis.

☐ ha a vektorrendszer rangja r , akkor $r \leq n$.

☐ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer generátorrendszer.

Az 3. válasz a helyes

(b) Legyen A $(n \times n)$ -es valós mátrix.

☐ Ha $\lambda = 0$ sajátértéke A -nak, akkor $|A| = 0$.

☐ Ha λ sajátértéke A -nak, akkor $-\lambda$ is.

☐ Ha A -nak két sajátértéke van, akkor egy kétdimenziós sajátaltere van.

☐ Ha A -nak v sajátvektora, akkor $-v$ nem sajátvektora.

Az 1. válasz a helyes

(4 pont)