

Név: \_\_\_\_\_  
EHA: \_\_\_\_\_

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $\Sigma$ |
|----|----|----|----|----|----------|
|    |    |    |    |    |          |

## Lineáris algebra

### Mintavizsga

A dolgozat megírására 90 perc áll rendelkezésre. A dolgozatírás során semmilyen segédeszköz sem használható (számológép sem). Automatikusan elégtelen jegyet kap az, aki puskázik, puskát hoz a tanterembe, feladatot másol le, vagy engedi azt lemásolni.

**Az 1. és 2. feladatból összesen legalább 25 pontot el kell érni, különben a vizsga elégtelen.**

**1. Feladat.** ( $10 \times 2$  pont) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Helyes válasz 2 pont, hibás válasz -1 pont, ha nincs válasz, 0 pont.

|                                                                                                                         |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Ha $A$ és $B$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $AB = BA$ .                                                       |  |
| Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke nem változik.                                                |  |
| Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor. |  |
| Bármely $V$ vektortér és $v_1, v_2, v_3 \in V$ esetén $v_1 + 2v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$ .                               |  |
| Ha a Leontyev-inverz tartalmaz pozitív számot, akkor a gazdaság működőképes.                                            |  |
| Ha egy vektor koordinátasora egy bázisban $(1, 2, -1)$ , akkor a bázis bármely vektorával kicserélhető.                 |  |
| Az $(1, -1, 2), (-2, 2, -4)$ vektorrendszer rangja 2.                                                                   |  |
| Azonos méretű invertálható mátrixok szorzata is invertálható.                                                           |  |
| Ha egy kvadratikuss alak mátrixának főminorjai: $-1, -2, -3$ , akkor a kvadratikuss alak negatív definit.               |  |
| Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a 2.                                           |  |

**2. Feladat.** ( $6 \times 5$  pont) A táblázatba csak a végeredményeket írja be. A részfeladatokra 0 vagy 5 pont kapható.

|                                                                                                                                                                                    |                                                                                            |                                                 |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--|
| Határozza meg az                                                                                                                                                                   | $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$                     | determináns értékét.                            |  |
| Határozza meg az                                                                                                                                                                   | $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ | lineáris egyenletrendszer általános megoldását. |  |
| Adja meg az $(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (1, -2, -2)$ bázisban a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátáit.                                                                                  |                                                                                            |                                                 |  |
| Számítsa ki a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját, valamint adja meg egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát. |                                                                                            |                                                 |  |
| Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a 2. Adja meg a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.                  |                                                                                            |                                                 |  |
| Határozza meg az $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ kvadratikuss alak osztályát (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit).                                      |                                                                                            |                                                 |  |

**3. Feladat.** ( $5 \times 6$  pont) Definiálja az alábbi fogalmakat, illetve mondja ki a tételeket.

Determinánsok szorzástétele:

Definiálja a vektorrendszer lineáris függetlenségét, valamint mondjon ki két tételt, ami lineárisan függő vektorrendszerre vonatkozik:

Vektortér bázisa, alterek dimenziótétele:

Oszloprang, sorrang, mátrix rangja, rangszámtétel:

Negatív definit kvadratikus alak (értékkészlet szerinti osztályozással):

**4. Feladat.** (10 pont) Legyen  $A$  tetszőleges  $n \times k$  méretű mátrix. Adjunk meg olyan  $P$ , illetve  $Q$  mátrixokat, melyekre a  $PAQ$  szorzat egy olyan  $1 \times 1$ -es mátrix, mely az  $A$  mátrix  $i$ . sorának  $j$ . elemét tartalmazza.

**5. Feladat.** (10 pont) Előfordulhat-e elemi bázistranszformáció során, hogy a táblázatban bizonyos számok nem változnak? Ha igen, akkor mely elemekkel fordulhat elő, és milyen esetekben?