

9. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 75. – 84. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg a p valós paraméter értékétől függően a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} p & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ p & 3 & 2 & p \end{pmatrix}.$$

Hajtsunk végre elemi bázistranszformációt a mátrix oszlopvektorrendszerén.

	a_1	a_2	a_3	a_4		a_1	a_2	a_4	
e_1	p	3	-1^*	2	$\rightarrow$	a_3	$-p$	-3	-2
e_2	2	6	-5	5		e_2	$2 - 5p$	-9	-5
e_3	-1	-3	-5	0		e_3	$-1 - 5p$	-18	-10
e_4	p	3	2	p		e_4	$3p$	9	$p + 4$

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_4 \\ \hline a_3 & -p & -3 & -2 \\ e_2 & 2-5p & -9^* & -5 \\ e_3 & -1-5p & -18 & -10 \\ e_4 & 3p & 9 & p+4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_4 \\ \hline a_3 & \frac{p-2}{3} & \frac{1}{3} \\ a_2 & \frac{5p-2}{9} & \frac{5}{9} \\ e_3 & -5+5p & 0 \\ e_4 & 2-2p & p-1 \end{array}$$

Most csak olyan generáló elemet tudunk választani, ami tartalmazza a paramétert, de csak abban az esetben választhatók generáló elemnek, ha nemnullák: $-5 + 5p \neq 0$ vagy $2 - 2p \neq 0$ vagy $p - 1 \neq 0$. Ha $p \neq 1$, akkor egyik sem nulla, ekkor bármelyiket választhatjuk generálóelemnek.

Gondolkodnivalók – Mátrix rangja

Tegyük fel, hogy $p \neq 1$, és legyen a generálóelem $-5 + 5p$, ekkor:

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_4 \\ \hline a_3 & \frac{p-2}{3} & \frac{1}{3} \\ a_2 & \frac{5p-2}{9} & \frac{5}{9} \\ e_3 & -5 + 5p^* & 0 \\ e_4 & 2 - 2p & p - 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} & a_4 \\ \hline a_3 & \frac{1}{3} \\ a_2 & \frac{5}{9} \\ a_1 & 0 \\ e_4 & p - 1 \end{array} .$$

Mivel feltettük, hogy $p \neq 1$, így $p - 1$ választható generálóelemnek, így minden oszlopvektort be tudtunk vinni a bázisba, tehát a mátrix rangja ebben az esetben 4.

Most legyen $p = 1$, a táblázatból látszik, hogy a rang ekkor 2:

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_4 \\ \hline a_3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ a_2 & \frac{3}{9} & \frac{5}{9} \\ e_3 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 \end{array} .$$

2. Gondolkodnivaló

Egy 5 ismeretlenes, 6 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának determinánsa nem 0. Mit tudunk mondani a megoldásáról?

A bővített mátrix 6×6 -os, és a determinánsa nem 0. Mivel a mátrix rangja a legnagyobb nem-0 aldeterminánsának rendjével egyezik meg, így ebben az esetben a rang 6.

Mennyi lehet az egyenletrendszer együtthatómátrixának a rangja? Mivel 5 ismeretlen van, ezért a mátrixnak 5 oszlopa van, tehát a rangja nem lehet nagyobb 5-nél.

Tehát az egyenletrendszer együtthatómátrixának a rangja legfeljebb 5, a bővített mátrixának a rangja pedig 6, így a Kronecker-Capelli tétel szerint az egyenletrendszernek nincs megoldása.

3. Gondolkodnivaló

Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert.

$$x_1 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_2 + x_4 = 0$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$ -ben

$u = (1, 1, 1, 1, -2)$, $v = (1, 0, -2, 0, 1)$, $w = (0, -1, 0, 1, 0)$,
 $x = (1, -2, -2, 2, 1)$, $y = (1, 0, -1, 0, 0)$.
Döntsük el, hogy az
alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a fenti egyenletrendszer
megoldásainak alterében?

- (a) u, v, w ;
- (b) v, w, x ;
- (c) w, x, y .

A homogén lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ez lépcsős alakú mátrix, tehát a homogén lineáris egyenletrendszer rangja $r = 2$. Mivel az ismeretlenek száma $n = 5$, így a megoldástere $n - r = 3$ dimenziós. Ez alapján mindhárom vektorrendszer elemszáma megfelelő.

(a) u, v, w ;

Először ellenőrizzük le, hogy a vektorok megoldásai-e az egyenletrendszernek. Az $u = (1, 1, 1, 1, -2)$ vektor esetén

$$1 + 1 - 2 = 0$$

$$1 + 1 \neq 0$$

Mivel u nem megoldás, ezért nem eleme a megoldástérnek, így a bázisának sem. Tehát az u, v, w nem bázis.

(b) v, w, x ;

Először ellenőrizzük le, hogy a vektorok megoldásai-e az egyenletrendszernek. Helyettesítsük rendre a $v = (1, 0, -2, 0, 1)$, $w = (0, -1, 0, 1, 0)$ és $x = (1, -2, -2, 2, 1)$ vektorokat.

$$\begin{array}{rclclcl} 1 - 2 + 1 & = & 0 & 0 + 0 + 0 & = & 0 & 1 - 2 + 1 & = & 0 \\ 0 + 0 & = & 0, & -1 + 1 & = & 0, & -2 + 2 & = & 0. \end{array}$$

Tehát mindhárom vektor eleme a megoldástérnek. A három vektor akkor alkot bázist a három dimenziós megoldástérben, ha lineárisan független.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a vektorrendszer rangja 2, így lineárisan függő, nem bázis.

(c) w, x, y ;

Korábban már láttuk, hogy a $w = (0, -1, 0, 1, 0)$ és $x = (1, -2, -2, 2, 1)$ vektorok megoldásai a homogén lineáris egyenletrendszernek, az $y = (1, 0, -1, 0, 0)$ vektor esetén

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 &= 0, \end{aligned}$$

így ez is eleme a megoldástérnek. A vektorok lineáris függetlenségét kell már csak vizsgálni.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a vektorrendszer rangja 3, így lineárisan független. Tehát a w, x, y vektorrendszer bázis lesz a megoldástérben.

Mátrix inverze

Definíció

Legyen A $n \times n$ -es mátrix. Az A mátrix inverze az A^{-1} $n \times n$ -es mátrix, ha $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, ahol E az $n \times n$ -es egységmátrix.

Létezés

Nem minden $n \times n$ -es mátrixnak létezik inverze. Legyen A olyan $n \times n$ -es mátrix, amelynek determinánsa 0. Ekkor a determinánsok szorzástételét felhasználva bármely B $n \times n$ -es mátrix esetén a következő teljesül:

$$|AB| = |A| \cdot |B| = 0.$$

Tehát az AB nem lehet az egységmátrix, bárhogy is választjuk a B -t, így A -nak nincs inverze.

Tétel

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ -es mátrix. Ekkor A -nak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Ha A determinánsa nem 0, akkor az inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az i . sor j . eleméhez tartozó adjungált aldeterminánst jelöli.

Az inverz gyakorlati kiszámítása

Az előző tételben megadott módszer az inverz kiszámítására nagyon hosszadalmas: egy $n \times n$ -es mátrix inverzéhez ki kellene számolni n^2 db $n - 1 \times n - 1$ -es determinánst. Ehelyett elemi bázistranszformációval fogjuk számolni a mátrix inverzét.

Inverzmátrix kiszámítása elemi bázistranszformációval

- A mátrixot beírjuk egy táblázatba, majd elemi bázistranszformációkat hajtunk végre, amíg csak tudunk generáló elemet választani.
- Ha sikerült az összes oszlopvektort bevinni a bázisba, akkor a mátrixnak létezik az inverze, azaz *invertálható*.
- A mátrix inverzét megkapjuk, ha sor- és oszlopcterékkel az indexeket rendezzük.

FONTOS: most nem szabad elhagyni a bázisból kikerülő vektor oszlopát!!!

Példa

Döntsük el, hogy invertálható-e az alábbi mátrix, ha igen, adjuk meg az inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beírjuk egy táblázatba a mátrixot, majd elemi bázistranszformációkat hajtunk végre:

	v_1	v_2	v_3		v_1	v_2	e_2		v_1	e_1	e_2		
e_1	1	-1	-1	$\rightarrow$	e_1	2	1^*	1	$\rightarrow$	v_2	2	1	1
e_2	1	2	1^*		v_3	1	2	1		v_3	-3	-2	-1
e_3	2	-1	-1		e_3	3	1	1		e_3	1^*	-1	0

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & e_1 & e_2 \\ \hline v_2 & 2 & 1 & 1 \\ v_3 & -3 & -2 & -1 \\ e_3 & 1^* & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline v_2 & -2 & 3 & 1 \\ v_3 & 3 & -5 & -1 \\ v_1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Vagyis minden vektort sikerült bevinni a bázisba, így a mátrixnak van inverze.

Az inverz az utolsó táblázatból olvasható le, ha sor- és oszlopcserékkel rendeztük a táblázatot:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline v_2 & -2 & 3 & 1 \\ v_3 & 3 & -5 & -1 \\ v_1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline v_1 & 1 & -1 & 0 \\ v_2 & -2 & 3 & 1 \\ v_3 & 3 & -5 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline v_1 & -1 & 0 & 1 \\ v_2 & 3 & 1 & -2 \\ v_3 & -5 & -1 & 3 \end{array}$$

Tehát a mátrix inverze:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix inverze úgy is kiszámolható, hogy a táblázatba a mátrix mellé az egységmátrixot is beírjuk, ebben az esetben a generáló elem oszlopa elhagyható, és a végén csak a sorokat kell rendezni:

	v_1	v_2	v_3	e_1	e_2	e_3		e_1	e_2	e_3	
e_1	1	-1	-1	1	0	0	$\rightarrow \dots \rightarrow$	v_2	3	1	-2
e_2	1	2	1	0	1	0		v_3	-5	-1	3
e_3	2	-1	-1	0	0	1		v_1	-1	0	1

Legyen A és B tetszőleges $n \times n$ -es invertálható mátrix, ekkor

- 1 $(A^{-1})^{-1} = A$,
- 2 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bizonyítás: A másodikat bizonyítjuk. Az AB -nek inverze a $B^{-1}A^{-1}$, mivel a szorzatuk az egységmátrix:

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot (BB^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Negatív kitevős hatvány

Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív kitevős hatványai:

$$A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

A hatványozás korábban megadott azonosságai negatív kitevők esetén is érvényesek maradnak.

Mátrixegyenlet

Legyen A $n \times m$ -es, B pedig $n \times k$ -as mátrix. Található-e olyan X mátrix, amelyre $AX = B$?

Az X mátrixnak $m \times k$ -asnak kell lennie ahhoz, hogy az egyenlőség teljesülhessen. Valójában a fenti kérdés k db olyan lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, melyeknek együttható mátrixa éppen A , míg a konstansoszlopok rendre éppen B oszlopai. Az ilyen típusú egyenletrendszerek egyszerre is megoldhatók, mégpedig úgy, hogy most az elemi bázistranszformáció során a konstansoszlop helyett a B mátrix szerepel.

Példa

Oldjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenletet.

Beírjuk a mátrixokat egy táblázatba, balra az A -t, jobbra pedig B -t, majd elemi bázistranszformációkat hajtunk végre:

	x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3			x_3	b_1	b_2	b_3
e_1	1	-1	2	-1	1	0	$\rightarrow \dots \rightarrow$	x_1	1	1	2	1
e_2	1	0	1	1	2	1		x_2	-1	2	1	1

Fontos megjegyezni, hogy most az x változók az X megoldásmátrix OSZLOPAIBAN helyezkednek el, és az értéküket úgy határozhatjuk meg, mint az egyenletrendszer megoldása esetén. Tehát ebben az esetben az x_3 szabad változó lesz, így minden oszlop harmadik eleme szabadon megválasztható, a többi érték pedig, mint az egyenletrendszerekénél, kifejezhető. Például az második oszlop esetén a jobboldali konstansok közül csak a második oszlopot kell figyelembe venni:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_3 & b_2 \\ \hline x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & -1 & 1 \end{array},$$

vagyis X második oszlopának harmadik eleme szabadon választható ($b \in \mathbb{R}$), az első eleme $2 - b$, második eleme pedig $1 + b$ lesz. Hasonlóképpen megadható X többi oszlopa is. Az általános megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} 1 - a & 2 - b & 1 - c \\ 2 + a & 1 + b & 1 + c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 2-b & 1-c \\ 2+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés

Ahogy a mátrixinverz számításnál már megjegyeztük, az inverz úgy is számítható, hogy az E egységmátrixot az A mellé írjuk. Ez annak felel meg, mintha az $AX = E$ mátrix egyenletet oldanánk meg, ekkor ha megoldható, akkor az X éppen A inverzét adja.

$XA = B$ típusú mátrixegyenlet

Hogyan oldanánk meg $XA = B$ típusú mátrixegyenleteket?

A korábban látott elemi bázistranszformációs megoldás csak az $AX = B$ alakú mátrixegyenleteknél működik. Transzponálás segítségével visszavezethető egy $XA = B$ típusú mátrixegyenlet egy $AX = B$ típusúra:

$$(XA)^T = B^T \Rightarrow A^T X^T = B^T.$$

Azonban fontos megjegyezni, hogy ekkor az elemi bázistranszformációval kapott mátrixot transzponálni kell, ahhoz hogy megkapjuk X -et.

Oldjuk meg az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet.

Először transzponáljuk:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Írjuk be a transzponálással kapott mátrixokat a táblázatba.

	x_1	x_2		b_1	b_2	b_3	$\rightarrow$		x_1	b_1	b_2	b_3	$\rightarrow$
e_1	2	-1^*		-3	-1	4	$\rightarrow$	x_2	-2	3	1	-4	$\rightarrow$
e_2	0	3		-3	0	9	$\rightarrow$	e_2	6^*	-12	-3	21	

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline x_2 & -1 & 0 & 3 \\ x_1 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}$$

Nem kaptunk ellentmondást, és nem maradt szabad ismeretlen, így pontosan egy megoldás van. Mivel x_1 és x_2 fordított sorrendben szerepel a táblázatban, úgy kapjuk meg X^T -at, ha megcseréljük a táblázat sorait:

$$X^T = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az X^T mátrixot transzponálva megkapjuk X -et:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

A megoldásunk helyességét célszerű ellenőrizni az eredeti mátrixegyenletbe visszahelyettesítve.

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

Valamint igazoljuk általánosan, hogy invertálható trianguláris mátrixok inverze is trianguláris.

2. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenletet a p valós paraméter értékétől függően

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$