

8. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 51. – 56., 70. – 74. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Most ne vegyük figyelembe, hogy az elemi bázistranszformáció során ez nem szabályos, és hajtsunk végre két elemi bázistranszformációt egymás után ugyanazon a helyen lévő generáló elemmel. Igazoljuk általánosan, hogy így a táblázat nem változik.

Példa:

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 3 & -1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -5 & -2 \\ x_2 & -3 & -1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 3 & -1^* \end{array}$$

- A generáló elem sorában lévő elemeket először osztjuk a generáló elemmel, majd a generáló elem reciprokával, így nem változnak.
- A generáló elem oszlopában lévő elemeket előbb a generáló elem -1 -szeresével osztjuk, majd a generáló elem reciprokanak -1 -szeresével, így ezek sem változnak.
- Azon elemeknél, melyekre a téglalap-szabályt alkalmaztuk, az elem értéke csak a generáló elemtől, illetve a téglalap két másik csúcsától függ, így elég erre a 2×2 -re vizsgálni. Legyen $a \neq 0$:

$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & a^* & b \\ e_2 & c & d \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & v_2 \\ \hline v_1 & \frac{1}{a}^* & \frac{b}{a} \\ e_2 & -\frac{c}{a} & \frac{ad-bc}{a} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & a & b \\ e_2 & c & d \end{array} .$$

Nézzük meg hogyan változik a d helyén lévő elem:

$$\frac{ad - bc}{a} - \frac{-\frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{ad - bc}{a} + \frac{bc}{a} = d$$

Az eredmény nem meglepő: ha kicseréljük egy bázis egy vektorát valami másikra, majd a másikat visszacseréljük az eredetire, akkor visszkapjuk az eredeti bázist, így minden vektor koordinátasora az eredeti marad.

2. Gondolkodnivaló

Előfordulhat-e elemi bázistranszformáció során, hogy bizonyos elemek nem változnak? Ha igen, akkor mely elemekkel fordulhat elő, és milyen esetekben?

Az elemek elhelyezkedése szerint a következő esetek lehetnek:

- A generáló elemet (jelölje a) lecseréljük a reciprokára, így pontosan akkor nem változik, ha $a = \frac{1}{a}$, azaz ha $a = 1$, vagy $a = -1$.
- A generáló elem sorának egy elemét elosztjuk a generáló elemmel, ez pontosan akkor egyezik meg az eredeti elemmel, ha a generáló elem 1, vagy az adott elem 0.
- A generáló elem oszlopának egy elemét elosztjuk a generáló elem -1 -szeresével, ez pontosan akkor egyezik meg az eredeti elemmel, ha a generáló elem -1 , vagy az adott elem 0.

- Ha az elem (jelölje d) nincs a generáló elem sorában vagy oszlopában, akkor a téglalap-szabály adja meg az új elem értékét:

$$d - \frac{bc}{a},$$

ahol $a \neq 0$ a generáló elem, b és c pedig a téglalap másik két csúcsa. Abban az esetben teljesül, hogy

$$d = d - \frac{bc}{a},$$

ha $b = 0$, vagy $c = 0$.

- Ha az elem (jelölje d) nincs a generáló elem sorában vagy oszlopában, akkor a téglalap-szabály adja meg az új elem értékét:

$$d - \frac{bc}{a},$$

ahol $a \neq 0$ a generáló elem, b és c pedig a téglalap másik két csúcsa. Abban az esetben teljesül, hogy

$$d = d - \frac{bc}{a},$$

ha $b = 0$, vagy $c = 0$.

Ha a b vagy a c elem 0, mivel a generáló elem sorában vagy az oszlopában található, (az előző két eset alapján) 0 is marad.

Összefoglalás

A következő esetben nem változik az elem,

- 1 ha a generáló elem 1, vagy -1 , akkor nem változik a generáló elem helyére írt elem,
- 2 ha a generáló elem 1, akkor a sorában lévő többi elem változatlan,
- 3 ha a generáló elem -1 , akkor az oszlopában lévő többi elem változatlan,
- 4 ha a generáló elem sorában van 0, akkor a 0 elem teljes oszlopa változatlan,
- 5 ha a generáló elem oszlopában van 0, akkor a 0 elem teljes sora változatlan marad.

3. Gondolkodnivaló

Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások.

- 1 Ha a v vektor koordináta sora $(2, 5, -1)$ a v_1, v_2, v_3 bázisban, akkor a v bevihető a bázisba bármely bázisvektor helyére.
- 2 Bármely nem-0 vektor bevihető a bázisba, azaz kicserélhető valamely elemével.
- 3 Elemi bázistranszformációnál a táblázat bármely nem-0 eleme választható generáló elemnek.

- 1 Igaz, hiszen egyik koordináta sem 0, így bármelyik lehet generáló elem.
- 2 Igaz, hiszen ha a vektor nem a 0 vektor, akkor van olyan koordinátája, amely nem 0, így ennek a koordinátának megfelelő bázisvektor helyére bevihető.
- 3 Nem igaz, a nem-0 elemnek e -vel jelölt sorban, és v -vel jelölt oszlopban kell szerepelnie.

Mátrix rangja

Definíció

A mátrix *sorrangjának* nevezzük a mátrix sorvektorrendszerének rangját.

Definíció

Oszlopvektorrendszerének rangját a mátrix *oszloprangjának* nevezzük.

Vagyis a sorrang éppen annak a vektorrendszernek a rangja, amit a mátrix sorai alkotnak, az oszloprang pedig a mátrix oszlopai által alkotott vektorrendszer rangja.

Definíció

Mátrix rangjának nevezzük a legnagyobb nem-0 aldeterminánsának a méretét. (Azaz a mátrix rangja k , ha kiválasztható belőle k oszlop és k sor úgy, hogy az általuk meghatározott $k \times k$ -as aldetermináns nem 0, ugyanakkor $k + 1$ oszlop, illetve sor már nem választható ki így.)

Jelölés

Az A mátrix rangját jelölje: $r(A)$.

FONTOS!!!

Ha a mátrix rangja k , akkor az összes $k + 1$, VAGY ANNÁL NAGYOBB méretű aldeterminánsa 0.

Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix sorrangját, oszloprangját és rangját.

A fenti mátrix sorrangjához meg kell határozni az

$$(1, -1, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (1, 0, 5, 2)$$

vektorrendszer rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a sorrang 2.

Az oszloprangot az

$$(1, -1, 1), (-1, 2, 0), (2, 1, 5), (1, 0, 2)$$

vektorrendszer rangja adja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát az oszloprang is 2.

A rangnál azt kell vizsgálni, hogy mekkora a legnagyobb nem-0 aldetermináns, ami a mátrixból kiválasztható. 2×2 -es determináns kiválasztható, például az első két sor, illetve első két oszlop által meghatározott:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kiválasztott determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Kiválasztható-e 3×3 -as determináns, ami nem 0? Egyszerű kombinatorika feladat: összesen 4 db 3×3 -as determináns választható ki a fenti mátrixból. Ezeket kiszámolva azt kapjuk, hogy mindegyiknek 0 az értéke. Tehát a mátrix rangja is 2.

A rang kiszámítása az előző módon rendkívül nehéz lenne: például egy 7 rangú 9×10 -es mátrix esetén 405 db 8×8 -as determinánsról kellene megmutatni, hogy mindegyiknek 0 az értéke.

A következő tétel segítségével azonban a rang könnyebben számítható.

Rangsámtétel

Bármely mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik a rangjával.

Mivel a sorrang vagy az oszloprang számítása nagyon egyszerű (akár Gauss-eliminációval, akár elemi bázistranszformációval), a fenti tétel segítségével könnyen kiszámíthatjuk bármely mátrix rangját.

Példa

Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

mátrix rangját. Adjunk meg a mátrixban maximális méretű nem-0 aldeteminánst.

A sorvektorrendszere:

$$(1, -1, 2, 1, 0), (2, -1, 3, 2, 1), (3, -2, 5, 3, 1), (1, -1, 2, 1, 1).$$

A sorvektorrendszer rangját először **Gauss-eliminációval** számoljuk. Érdekes a Gauss-eliminációt úgy végrehajtani, hogy a sorokat megjelöljük, mert a lépcsős alakban maradó sorok, illetve a sorok első nem-0 elemei meghatározzák az eredeti mátrix megfelelő méretű nem-0 aldeterminánsát.

$$\begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} a \\ b \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát az eredeti mátrix 1., 2. és 4. sora, illetve 1., 2., illetve 5. oszlopa által alkotott aldetermináns egy maximális méretű 0-tól különböző értékű aldetermináns lesz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix 1., 2. és 4. sora, illetve 1., 2., illetve 5. oszlopa által alkotott aldetermináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Persze nemcsak egy megfelelő aldetermináns van, hanem több is. Ha a Gauss-elimináció során az 1. lépés után megcseréltük volna a 2. és a 3. sort, akkor az 1., 3. és 4. sora, illetve 1., 2., illetve 5. oszlopa által meghatározott aldeterminánst kaptuk volna.

A rangszámítás megoldható **elemi bázistranszformációval** is. Ebben az esetben közvetlenül a mátrix oszloprangját határozzuk meg:

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline e_1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ e_2 & 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ e_3 & 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ e_4 & 1 & -1 & 2 & 1^* & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_5 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ e_2 & 0 & 1^* & -1 & -1 \\ e_3 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ v_4 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_3 & v_5 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & -1 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 \\ e_3 & 0 & 0 & -1^* \\ v_4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 \\ v_5 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 \end{array}$$

Három vektort sikerült bevinni a bázisba, ezért a mátrix oszloprangja, és így a rangja is 3.

Az eredményből itt is megkaphatunk egy megfelelő aldeterminánst: a sorindexeket a bázisból kikerült változók adják (e_2, e_3, e_4), az oszlopindexeket pedig a bázisba bekerültek (v_2, v_4, v_5).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Kronecker-Capelli tétel

Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha mátrixának rangja megegyezik a bővített mátrixának a rangjával.

Indoklás: A tétel állítása könnyen látható akár Gauss-eliminációt, akár elemi báztistranszformációt használunk az egyenletrendszer megoldására.

(1) Ha Gauss-eliminációval oldunk meg egy egyenletrendszert, akkor a lépcsős alakban a nem nulla sorok száma megadja a bővített mátrix rangját. Ha konstans oszlopától eltekintünk, és csak az egyenletrendszer mátrixának rangját vizsgáljuk, ez abban az esetben lesz kisebb a bővített mátrix rangjánál, ha a lépcsős alak tartalmaz $(0 \dots 0 | c)$, $c \neq 0$ -t, azaz ellentmondó sor szerepel, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha nem szerepel ellentmondó sor, akkor az egyenletrendszer mátrixának rangja megegyezik a bővített mátrix rangjával.

(2) Elemi bázistranszformációval:

	x_3	x_4	b
x_1	.	.	.
x_2	.	.	.
e_3	0	0	c

ahol $c \neq 0$. Ekkor a változókat már nem tudom bevinni a bázisba, de a b -t be tudnám. Azaz a bővített mátrix rangja nagyobb ellentmondó sor esetén, mint az egyenletrendszer mátrixának rangja. Ha nincs ellentmondó sor, akkor a két rang megegyezik.

Megjegyzés

Az egyenletrendszer mátrixának rangja ($r(A)$) nem lehet nagyobb, mint a bővített mátrixának rangja ($r(A|b)$), hiszen eggyel kevesebb oszlopot tartalmaz. Tehát általában teljesül az $r(A) \leq r(A|b)$ összefüggés, és pontosan akkor oldható meg az egyenletrendszer, ha $r(A) = r(A|b)$.

Homogén lineáris egyenletrendszer

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszert *homogénnek* nevezünk, ha benne minden jobboldali konstans 0.

Példa

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 0.3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszernek n változót tartalmaz, akkor megoldásai (mint $\mathbb{R}^n$ -beli vektorok) alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben.

Definíció

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az egyenletrendszer *megoldásterének* nevezzük. A megoldástér egy bázisát az egyenletrendszer *fundamentális rendszerének* (vagy *alaprendszerének*) nevezzük.

Fundamentális rendszer megadása

Tétel

Ha egy n változós homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának a rangja r , akkor a megoldástere $n - r$ dimenziós.

Fundamentális rendszer megadása

- Megoldjuk az egyenletrendszert, vagyis meghatározzuk a kötött, illetve a szabad változókat (ha r db kötött változó van, akkor $n - r$ db szabad).
- Minden szabad változóhoz megadunk egy vektort, mégpedig azt a megoldásvektort, amely úgy keletkezik, hogy az adott szabad változót 1-nek választjuk, a többit pedig 0-nak.

Megjegyzés

Mivel a fundamentális rendszer egy bázis, ezért nem egyértelmű a megadása, csak az elemszáma ($n - r$). Azaz végtelen sok fundamentális rendszer létezik.

Fundamentális rendszer megadása

Példa

Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális rendszerét:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0\end{aligned}$$

Először megoldjuk elemi bázistranszformációval:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
e_1	1	-1	2	1	-2	0	
e_2	2	-1	-1	2	3	0	$\rightarrow \dots \rightarrow$
e_3	3	-2	1	3	1	0	x_1
e_4	1	0	-3	1	5	0	x_2

	x_3	x_4	x_5	
x_1	-3	1	5	0
x_2	-5	0	7	0

	x_3	x_4	x_5	
x_1	-3	1	5	0
x_2	-5	0	7	0

Az egyenletrendszer mátrixának rangja 2 (= kötött ismeretlenek száma). Az általános megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - x_4 - 5x_5 \\ x_2 &= 5x_3 - 7x_5 \end{aligned}$$

Mivel 3 szabad ismeretlen van ($n - r = 5 - 2 = 3$), a fundamentális rendszer 3 vektorból áll:

$$\begin{aligned} x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 &\Rightarrow (3, 5, 1, 0, 0), \\ x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 &\Rightarrow (-1, 0, 0, 1, 0), \\ x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 &\Rightarrow (-5, -7, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg a p valós paraméter értékétől függően a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} p & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ p & 3 & 2 & p \end{pmatrix}.$$

2. Gondolkodnivaló

Egy 5 ismeretlenes, 6 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának determinánsa nem 0. Mit tudunk mondani a megoldásáról?

3. Gondolkodnivaló

Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$ -ben

$u = (1, 1, 1, 1, -2)$, $v = (1, 0, -2, 0, 1)$, $w = (0, -1, 0, 1, 0)$,
 $x = (1, -2, -2, 2, 1)$, $y = (1, 0, -1, 0, 0)$.
Döntsük el, hogy az
alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a fenti egyenletrendszer
megoldásainak alterében?

- (a) u, v, w ;
- (b) v, w, x ;
- (c) w, x, y .