

7. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 57. – 61. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Legyenek a v vektor koordinátái a $v_1, \dots, v_n$ bázisban: $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

Igazoljuk, hogy a $v, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer bázis.

Mivel a vektorrendszer n elemű, így elég azt igazolni, hogy lineárisan független, ezt indirekt úton bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy nem lineárisan független, ez csak úgy lehet, hogy v előáll a többi lineáris kombinációjaként, hiszen $v_2, \dots, v_n$ egy bázis része, így lineárisan független. Ha v vektor előáll a $v_2, \dots, v_n$ lineáris kombinációjaként, akkor a $v_1, \dots, v_n$ bázisban a v_1 -re vonatkozó koordinátája 0. A koordináták megadása viszont egyértelmű egy bázisban, és a feltétel szerint v vektor koordinátái a $v_1, \dots, v_n$ bázisban: $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, így ellentmondásra jutottunk.

Megadjuk a v_1 vektor koordinátáit $v, v_2, \dots, v_n$ bázisban.

Azt tudjuk, hogy a v vektor koordinátái a $v_1, \dots, v_n$ bázisban:
 $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, így:

$$v = v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Ebből v_1 -et kifejezhetjük:

$$v_1 = v - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n.$$

Azaz a v_1 vektor koordinátáit $v, v_2, \dots, v_n$ bázisban:
 $(1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$.

2. Gondolkodnivaló

Igazoljuk, hogy egy vektortér bármely lineárisan független vektorrendszerre kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás: Ha $v_1, \dots, v_k$ egy lineárisan független vektorrendszer, akkor a rangja k . Ha nem bázis, akkor ez csak úgy fordulhat elő, hogy nem generátorrendszer, vagyis van olyan v vektor, amely nem eleme a $[v_1, \dots, v_k]$ altérnek. Ekkor azonban a $v_1, \dots, v_k, v$ vektorrendszer is lineárisan független, és a rangja $k + 1$. Ezt a lépést ismételve a rang folyamatosan növelhető, míg el nem éri a vektortér dimenzióját, vagyis a lineárisan független vektorrendszer ki nem egészül bázissá.

3. Gondolkodnivaló

Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az

- (a) $(1, 2, -1), (-2, -3, 5), (3, 4, x)$ vektorrendszer bázist alkosson $\mathbb{R}^3$ -ben.
- (b) $(1, -4, 0, 8), (0, -2, 3, 1), (2, -5, x, 4)$ vektorrendszer NE alkosson bázist $\mathbb{R}^4$ -ben.

Előző előadáson láttuk, hogy egy k -elemű vektorrendszer pontosan akkor alkot bázist $\mathbb{R}^n$ -ben, ha $k = n$, és a vektorrendszer rangja is megegyezik n -nel.

A feladat (b) részében található vektorrendszer elemszáma $3 < 4$, így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a vektorrendszer nem alkot bázist $\mathbb{R}^4$ -ben.

(a) $(1, 2, -1)$, $(-2, -3, 5)$, $(3, 4, x)$ vektorrendszer bázist alkotson $\mathbb{R}^3$ -ben.

Mivel a vektorrendszer elemszáma 3, így $\mathbb{R}^3$ -ben akkor fog bázist alkotni, ha lineárisan független, azaz a rangja 3. Határozzuk meg a vektorrendszer rangját, a vektorokat beírjuk egy mátrix soraiba, majd lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & x+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & x+9 \end{pmatrix}.$$

A rang, akkor 3, ha a mátrixnak 3 nem-nulla sora van, tehát $x + 9 \neq 0$. Azaz a vektorrendszer akkor bázis, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$.

Elemi bázistranszformáció

Definíció

Elemi bázistranszformációnak hívjuk azt, amikor egy bázis valamelyik vektorát kicseréljük egy másik vektorra úgy, hogy a csere végrehajtása után is bázist kapunk. (Ezt úgy is szokás nevezni, hogy egy vektort beviszünk a bázisba.)

Mi a feltétele annak, hogy a csere végrehajtása után kapott vektorrendszer is bázis legyen?

Legyen a bázis v_1, v_2, v_3 , valamint $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Kérdés, hogy a v, v_2, v_3 vektorrendszer bázis-e?

Ehhez meg kell határozni a v, v_2, v_3 rangját.

$$\text{rang}(v, v_2, v_3) = \text{rang}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_2, v_3) = \text{rang}(\alpha_1 v_1, v_2, v_3)$$

hiszen a rang nem változik meg, ha egy vektorból kivonjuk más vektorok többszöröseit.

$$\begin{aligned}\text{rang}(v, v_2, v_3) &= \text{rang}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_2, v_3) = \\ &= \text{rang}(\alpha_1 v_1, v_2, v_3),\end{aligned}$$

Ha $\alpha_1 = 0$, akkor a fenti vektorrendszer rangja 2, hiszen az első vektora 0.

Ha $\alpha_1 \neq 0$, akkor a rangja 3, hiszen ekkor az első vektort $\frac{1}{\alpha_1}$ -gyel szorozva visszkapjuk a v_1, v_2, v_3 vektorrendszert.

Megjegyzés

Ha a v_1, v_2, v_3 bázis v_1 elemét a v vektorra cseréljük, pontosan akkor kapunk bázist, ha v vektor v_1 -re vonatkozó koordinátája nem nulla. (Lásd: 1. Gondolkodnivaló – Bázis, dimenzió.)

A következő tétel általánosan fogalmazza meg az előző megállapítást.

Tétel

Ha $v_1, \dots, v_n$ egy bázisa V -nek és $v \in V$, akkor a

$$v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n$$

vektorrendszer pontosan akkor bázisa V -nek, ha a v vektor v_i -re vonatkozó koordinátája nem 0.

Tegyük fel, hogy bizonyos vektorok koordinátáit ismerjük a $v_1, \dots, v_n$ bázisra vonatkozóan. Meg tudjuk-e határozni a koordinátájukat az új bázisra vonatkozóan?

Legyen az eredeti bázis v_1, v_2, v_3 , valamint

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, így a koordinátasora $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ahol $\alpha_1 \neq 0$, az új bázis pedig legyen v, v_2, v_3 .

Mi lesz a $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$ vektor koordinátasora az új bázisban?

Mivel $v_1 = \frac{1}{\alpha_1} v - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3$, így

$$w = \beta_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} v - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 \right) + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3.$$

Ezt átrendezve kapjuk:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \left(\beta_2 - \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1} \right) v_2 + \left(\beta_3 - \frac{\beta_1 \alpha_3}{\alpha_1} \right) v_3.$$

Tehát w koordinátasora a v, v_2, v_3 bázisban:

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \beta_2 - \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1}, \beta_3 - \frac{\beta_1 \alpha_3}{\alpha_1} \right).$$

Tétel

Legyen $v_1, \dots, v_n$ egy bázisa V -nek, v koordinátságai pedig legyenek $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ahol $\alpha_i \neq 0$. Legyen továbbá w koordinátságai $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ a $v_1, \dots, v_n$ bázisban. Ekkor a

$$v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n$$

vektorrendszer is bázis, és a w vektor koordinátságai ebben a bázisban:

$$\left(\beta_1 - \frac{\beta_i \alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \dots, \beta_n - \frac{\beta_n \alpha_n}{\alpha_i} \right).$$

Legyen $e_1, \dots, e_n$ bázis a V vektortérben, $v_1, \dots, v_k$ pedig vektorok V -ben.

Ekkor a $v_1, \dots, v_k$ vektorok koordinátáit beírhatjuk egy táblázat oszlopaiba: a sorokat a bázis elemeivel címkézzük, az oszlopokat pedig a v_i vektorokkal.

Ha valamelyik v_i vektort bevisszük a bázisba (valamelyik e_j bázisvektor helyére), akkor a táblázatban szereplő koordináták megváltoznak, mégpedig az előző tételnek megfelelően.

Elemi bázistranszformáció a gyakorlatban

Ha a megfelelő táblázat:

	v_1	$\dots$	v_i	$\dots$	v_k
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1i}	$\dots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_j	a_{j1}	$\dots$	a_{ji}^*	$\dots$	a_{jk}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{ni}	$\dots$	a_{nk}

akkor v_i pontosan akkor cserélhető ki e_j -vel, ha $a_{ji} \neq 0$.

Ezen a_{ji} számot *generáló elemnek* nevezzük, és *-gal jelöljük meg a táblázatban.

Elemi bázistranszformáció a gyakorlatban

Ha a v_i vektort bevittük a bázisba az e_j vektor helyébe a következő új táblázatot kapjuk:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & v_1 & \dots & e_j & \dots & v_k \\
 \hline
 e_1 & a_{11} - \frac{a_{j1}a_{1i}}{a_{ji}} & \dots & -\frac{a_{1i}}{a_{ji}} & \dots & a_{1k} - \frac{a_{jk}a_{1i}}{a_{ji}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 v_i & \frac{a_{j1}}{a_{ji}} & \dots & \frac{1}{a_{ji}}^* & \dots & \frac{a_{jk}}{a_{ji}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 e_n & a_{n1} - \frac{a_{j1}a_{ni}}{a_{ji}} & \dots & -\frac{a_{ni}}{a_{ji}} & \dots & a_{nk} - \frac{a_{jk}a_{ni}}{a_{ji}}
 \end{array}$$

"Téglalapszabály"

A "téglalapszabály" segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem a generáló elemmel együtt egy téglalap két szemközi csúcsát adja:

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	b	$.$	d	$.$
e_2	$.$	$.$	$.$	$.$
e_3	a^*	$.$	c	$.$

Ebben az esetben az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

A bázistranszformáció lépései

A bázistranszformációt a következőképpen hajtjuk végre:

- választunk egy generáló elemet: olyan nem 0 számot, amely e -vel jelölt sorban, és v -vel jelölt oszlopban van,
- felcseréljük a generáló elem sor- és oszlopjelét,
- a generáló elemet lecseréljük a reciprokára,
- a generáló elem sorának többi elemét elosztjuk a generáló elemmel,
- a generáló elem oszlopának többi elemét elosztjuk a generáló elem -1 -szeresével,
- a többi elemet a "téglalapszabállyal" számoljuk,
- ezt addig ismételjük, amíg tudunk generáló elemet választani.

Példa

Egy elemi bázistranszformáció:

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 6 & 2 & -3 \\ e_2 & 4 & 2^* & 5 \\ e_3 & -6 & 3 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & v_1 & e_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 2 & -1 & -8 \\ v_2 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ e_3 & -12 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}$$

Érdemes észrevenni, hogy a generáló elem oszlopának és sorának kivételével a többi elemmel pont az történt, mintha kinulláztuk volna a generáló elemmel az oszlopát.

Bizonyos esetekben az elemi bázistranszformáció során el lehet (el kell) hagyni a generáló elem oszlopát.

A következőekben nézzük az elemi bázistranszformáció néhány alkalmazását.

Rangszámításkor a kérdéses vektorrendszert írjuk be a táblázat oszlopaiba, majd hajtsunk végre annyi elemi bázistranszformációt, ahányat csak tudunk. A bázisba bevitt vektorrendszer épp az eredeti vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszere lesz.

Példa

Adjuk meg a

$$(1, -1, 1, 0), (-1, 0, 2, 1), (0, -1, 3, 1), (3, -2, 0, -1), (-3, 1, 3, 2)$$

vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszerét elemi bázistranszformáció segítségével.

Beírjuk a vektorokat egy táblázat oszlopaiba, majd generáló elemeket választunk, amíg csak tudunk.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5			v_1	e_1	v_3	v_4	v_5
e_1	1	-1^*	0	3	-3		v_2	-1	-1	0	-3	3
e_2	-1	0	-1	-2	1	$\rightarrow$	e_2	-1	0	-1	-2	1
e_3	1	2	3	0	3		e_3	3	2	3	6	-3
e_4	0	1	1	-1	2		e_4	1	1	1^*	2	-1

	v_1	e_1	e_4	v_4	v_5
v_2	-1	-1	0	-3	3
$\rightarrow e_2$	0	1	1	0	0
e_3	0	-1	-3	0	0
v_3	1	1	1	2	-1

	v_1	e_1	e_4	v_4	v_5
v_2	-1	-1	0	-3	3
e_2	0	1	1	0	0
e_3	0	-1	-3	0	0
v_3	1	1	1	2	-1

Vegyük észre, hogy nem tudunk több generáló elemet választani, hiszen a szóba jöhető helyeken (v -s oszlop, e -s sor) már csak 0-k vannak. Tehát a feladatot megoldottuk, egy maximális lineárisan független részrendszert adnak a bázisba bevitt vektorok:

$$v_2, v_3,$$

tehát a vektorrendszer rangja 2.

Valójában a rangszámítás éppen egy olyan feladat, ahol nincs szükség a generáló elem oszlopára, így az elhagyható:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5			v_1	v_3	v_4	v_5
e_1	1	-1^*	0	3	-3		v_2	-1	0	-3	3
e_2	-1	0	-1	-2	1	$\rightarrow$	e_2	-1	-1	-2	1
e_3	1	2	3	0	3		e_3	3	3	6	-3
e_4	0	1	1	-1	2		e_4	1	1^*	2	-1

	v_1	v_4	v_5
v_2	-1	-3	3
$\rightarrow e_2$	0	0	0
e_3	0	0	0
v_3	1	2	-1

Észrevételek

- A generáló elem törtek nevezőjében szerepel, így érdemes 1-et, vagy -1 -et választani generáló elemnek.
- Az elemi bázistranszformáció és a Gauss-elimináció majdnem ugyanaz: ahol az egyik használható, ott a másik is, azonban az elemi bázistranszformáció előnye, hogy itt a generáló elem szabadon választható.

Lineáris egyenletrendszer megoldása

Lineáris egyenletrendszert is meg lehet oldani elemi bázistranszformációval:

- Beírjuk az egyenletrendszer mátrixát egy táblázatba, majd végrehajtjuk a bázistranszformációt.
- A kötött változók a bázisba bevitt változók lesznek, míg a szabad változó a többi változó.
- Az ellentmondó sor ugyanúgy néz ki, mint a Gauss-elimináció esetében.

FONTOS!!!

Ha lineáris egyenletrendszert oldunk meg elemi bázistranszformációval, akkor a generáló elem oszlopát el KELL hagyni.

Példa

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 4 \\ 7x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 3\end{aligned}$$

Beírjuk táblázatba:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
e_1	3	4	2	-1^*	0	-3	
e_2	-4	5	-3	2	1	4	$\rightarrow$
e_3	7	-6	-4	3	3	2	
e_4	6	3	-5	4	4	3	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
e_1	3	4	2	-1^*	0	-3	
e_2	-4	5	-3	2	1	4	$\rightarrow$
e_3	7	-6	-4	3	3	2	
e_4	6	3	-5	4	4	3	

	x_1	x_2	x_3	x_5	b			x_1	x_2	x_5	b
x_4	-3	-4	-2	0	3		x_4	1	22	2	-1
e_2	2	13	1^*	1	-2	$\rightarrow$	x_3	2	13	1	-2
e_3	16	6	2	3	-7		e_3	12	-20	1^*	-3
e_4	18	19	3	4	-9		e_4	12	-20	1	-3

	x_1	x_2	b
x_4	-23	62	5
$\rightarrow x_3$	-10	33	1
x_5	12	-20	-3
e_4	0	0	0

	x_1	x_2	b
x_4	-23	62	5
x_3	-10	33	1
x_5	12	-20	-3
e_4	0	0	0

A megoldás során nem talákoztunk ellentmondó sorral, és az eljárás véget ért (nincs több generáló elem), ezért van megoldás.

A kötött változók: x_3, x_4, x_5 , és a kifejezésük a szabad változókkal:

$$x_3 = 1 + 10x_1 - 33x_2,$$

$$x_4 = 5 + 23x_1 - 62x_2,$$

$$x_5 = -3 - 12x_1 + 20x_2.$$

Figyeljünk az előjelváltásra! A második függőleges vonala táblázatban az egyenletek egyenlőségjelének felel meg, a szabad változókat pedig a konstans oldalára kell vinni.

Gauss-elimináció vs elemi bázistranszformáció

A két módszer lényegében ugyanaz, de mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

Az elemi bázistranszformáció előnye, hogy a generáló elem BÁRHONNAN választható, nem szükséges az első lépésben az első oszloppal dolgozni.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert Gauss-eliminációval és elemi bázistranszformációval is:

$$29x_1 + 35x_2 + 3x_3 = 8$$

$$19x_1 + 23x_2 + 2x_3 = 5$$

$$8x_1 + 11x_2 + x_3 = 2.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 29 & 35 & 3 & 8 \\ 19 & 23 & 2 & 5 \\ 8 & 11 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 29 & 35 & 3 & 8 \\ 0 & \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & -\frac{7}{29} \\ 0 & \frac{39}{29} & \frac{5}{29} & -\frac{6}{29} \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 29 & 0 & -\frac{29}{2} & \frac{261}{2} \\ 0 & \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & -\frac{7}{29} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{29} & 0 & \frac{2}{29} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right)$$

Tehát a megoldás: $(0, 1, -9)$.

Elemi bázistranszformációval:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline e_1 & 29 & 35 & 3 & 8 \\ e_2 & 19 & 23 & 2 & 5 \\ e_3 & 8 & 11 & 1^* & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & b \\ \hline e_1 & 5 & 2 & 2 \\ e_2 & 3 & 1^* & 1 \\ x_3 & 8 & 11 & 2 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c|c} & x_1 & b \\ \hline e_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 \\ x_3 & -25 & -9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} & \\ \hline x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & -9 \end{array}$$

Tehát a megoldás $(0, 1, -9)$.

A Gauss-eliminációval előnye viszont az, hogy van lehetőségünk 1-est előállítani, ha esetleg nincs az eredeti feladatban.

Példa

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$18x_1 + 9x_2 + 23x_3 = 50$$

$$17x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 42$$

$$21x_1 + 20x_2 - 10x_3 = 31$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 9 & 23 & 50 \\ 17 & 13 & 12 & 42 \\ 21 & 20 & -1 & 31 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 11 & 8 \\ 17 & 13 & 12 & 42 \\ 21 & 20 & -1 & 31 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 11 & 8 \\ 0 & 81 & -175 & -94 \\ 0 & 104 & -241 & -137 \end{array} \right)$$

$$81 \cdot 9 - 104 \cdot 7 = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 11 & 8 \\ 0 & 729 & -1575 & -846 \\ 0 & 728 & -1687 & -959 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 112 & 113 \\ 0 & 728 & -1687 & -959 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 112 & 113 \\ 0 & 728 & -1687 & -959 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 459 & 460 \\ 0 & 1 & 112 & 113 \\ 0 & 0 & -83223 & -83223 \end{array} \right)$$

A megoldás: $(1, 1, 1)$.

Házi feladat végigszámolni elemi bázistranszformációval.

A VIZSGÁN SZÁMOLÓGÉP NEM HASZNÁLHATÓ!!!

1. Gondolkodnivaló

Most ne vegyük figyelembe, hogy az elemi bázistranszformáció során ez nem szabályos, és hajtsunk végre két elemi bázistranszformációt egymás után ugyanazon a helyen lévő generáló elemmel. Igazoljuk általánosan, hogy így a táblázat nem változik.

Példa:

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 3 & -1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -5 & -2 \\ x_2 & -3 & -1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 3 & -1^* \end{array}$$

2. Gondolkodnivaló

Előfordulhat-e elemi bázistranszformáció során, hogy bizonyos elemek nem változnak? Ha igen, akkor mely elemekkel fordulhat elő, és milyen esetekben?

3. Gondolkodnivaló

Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások. (A válaszokat indokoljuk.)

- Ha a v vektor koordináta sora $(2, 5, -1)$ a v_1, v_2, v_3 bázisban, akkor a v bevihető a bázisba bármely bázisvektor helyére.
- Bármely nem-0 vektor bevihető a bázisba, azaz kicserélhető valamely elemével.
- Elemi bázistranszformációnál a táblázat bármely nem-0 eleme választható generáló elemnek.