

6. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 37. – 41. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Legyen V valós számtest feletti vektortér. Igazolja, hogy ha a $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ vektorrendszerben pontosan egy vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor ez a vektor a nullvektor.

Legyen v_i az az egyetlen vektor, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n. \quad (*)$$

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk:

Tegyük fel, hogy $v_i \neq \underline{0}$.

Mivel $v_i \neq \underline{0}$, így a $(*)$ egyenletben van olyan együttható, amely nem 0, legyen ez α_j .

A (*) egyenletet átrendezve kapjuk:

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{i-1} v_{i-1} + v_i - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \alpha_n v_n.$$

Ezután leoszthatunk α_j -vel, mert $\alpha_j \neq 0$.

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_j} v_{i-1} + \frac{1}{\alpha_j} v_i - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} v_n.$$

Azaz előállítottuk v_j -t is a többi vektor lineáris kombinációjaként, de ez ellentmond annak, hogy v_i az egyetlen ilyen vektor.

Tehát a feltevésünk, miszerint a v_i nem a nullvektor nem volt helyes, azaz $v_i = \underline{0}$.

2. Gondolkodnivaló

Legyenek u , v és w lineárisan független vektorok valamely V vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

(a) $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$;

(b) $u + 3v + 2w$, $2u + w$, $u + v + w$.

(a) $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$.

Vizsgáljuk, hogy a vektorok mely lineáris kombinációja ad nullvektort.

$$x_1(u + v) + x_2(u - v) + x_3(u - 2v + w) = \underline{0}.$$

A zárójeleket felbontva, és átrendezve:

$$(x_1 + x_2 + x_3)u + (x_1 - x_2 - 2x_3)v + x_3w = \underline{0}.$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)u + (x_1 - x_2 - 2x_3)v + x_3w = \underline{0}.$$

Mivel u , v és w lineárisan független, így csak a triviális lineáris kombinációjuk ad nullvektort, tehát:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Az utolsó sorból $x_3 = 0$ -t kapunk, majd ezt a második egyenletbe helyettesítve $x_2 = 0$, majd az elsőbe visszahelyettesítve $x_1 = 0$ adódik. Tehát csak a triviális lineáris kombináció ad nullvektort, így a vektorrendszer lineárisan független.

$$(b) \quad u + 3v + 2w, \quad 2u + w, \quad u + v + w.$$

Vizsgáljuk, hogy a vektorok mely lineáris kombinációja ad nullvektort.

$$x_1(u + 3v + 2w) + x_2(2u + w) + x_3(u + v + w) = \underline{0}.$$

A zárójeleket felbontva, és átrendezve:

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)u + (3x_1 + x_3)v + (2x_1 + x_2 + x_3)w = \underline{0}.$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Tehát van szabad ismeretlen, nem csak a triviális megoldás ad nullvektort. A vektorrendszer lineárisan függő.

Például a vektorok következő lineáris kombinációja nullvektort ad:

$$(u + 3v + 2w) + (2u + w) - 3(u + v + w) = \underline{0}.$$

3. Gondolkodnivaló

Igazak-e a következő állítások?

- (a) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.
- (b) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben.
- (c) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i -re v_i előáll a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

- (a) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.

Az állítás nem igaz.

Ellenpélda: $\mathbb{R}^2$ -ben a $(1, 2), (1, 3), (2, 4)$ vektorrendszer generátorrendszer, de nem lineárisan független.

- (b) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben.

Az állítás nem igaz.

Ellenpélda: $\mathbb{R}^3$ -ben az $(1, 2, 3), (1, 2, 4)$ vektorrendszer lineárisan független (a vektorok nem esnek egy egyenesbe), de nem generátorrendszer ($\mathbb{R}^3$ -ben bármely generátorrendszer legalább három elemű).

(c) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i -re v_i előáll a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

Az állítás nem igaz.

Ellenpélda: $\mathbb{R}^3$ -ben az $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 4, 6)$, $v_3 = (1, 5, 6)$ vektorrendszer lineárisan függő ($v_2 = 2v_1$ teljesül). Azonban nem létezik olyan α és β valós szám, amelyre:

$$v_3 = (1, 5, 6) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(2, 4, 6) = \alpha v_1 + \beta v_2$$

teljesül, hiszen v_1 és v_2 egy egyenesbe esik. Így a v_3 vektor nem áll elő a v_1 és v_2 vektorok lineáris kombinációjaként.

Bázis

Definíció

Vektortér *bázisának* nevezzük a vektortér lineárisan független generátorrendszerét.

Példa

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- $\mathbb{R}^n$ -ben az $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ vektorrendszer.
- A térben bármely három vektor, ami nem esik egy síkba.
- $\mathbb{R}^3$ -ben az $(1, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{3}, 1, 1), (-1, 1, \sqrt{5})$ vektorrendszer.

A valós vektortereknek végtelen sok bázisa van (kivéve a $\{0\}$ vektorteret).

Definíció

Egy vektorteret *véges dimenziós*nak nevezünk, ha van véges generátorrendszere.

Mi eddig is csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkoztunk. Végtelen dimenziós esetén a lineáris függetlenséget és a generátorrendszer fogalmát is precízebben kellene megadni.

Tétel

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Bizonyítás: Legyenek $v_1, \dots, v_n$, illetve $u_1, \dots, u_m$ bázisai a V vektortérnek. Mivel mindkét vektorrendszer lineárisan független, az első vektorrendszer rangja n , a másodiké m . Mivel mindkét vektorrendszer generátorrendszer is, ezért az Alaptétel mindkettőre alkalmazható: az $u_1, \dots, u_m$ vektorok előállnak a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért $m \leq n$. Ez fordítva is teljesül: a $v_1, \dots, v_n$ vektorok előállnak a $u_1, \dots, u_m$ vektorok lineáris kombinációjaként, így $n \leq m$, azaz $n = m$.

Definíció

Ha a V vektortérnek van véges bázisa, akkor V *dimenzióján* bármely bázisának elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, nem függ a bázis választásától.)

Példa

Hány dimenziós az $\mathbb{R}^4$ vektortér?

Mivel az

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$$

vektorrendszer bázis $\mathbb{R}^4$ -ben, ezért a dimenziója 4.

Általában: az $\mathbb{R}^n$ vektortér n dimenziós.

Jelölés

Az U altér dimenzióját $\dim U$ -val jelöljük.

Tétel

A $[v_1, \dots, v_n]$ altér dimenziója megegyezik a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangjával. A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei bázisai ezen altérnek.

Tétel

Ha a V vektortér dimenziója n , akkor bármely n -elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V -nek.

Eddig alteret általában generátorrendszerével adtunk meg, azonban a bázisa jobban jellemzi az alteret.

Bázis megadása

Ismert az altér egy generátorrendszere.

- 1 Meghatározzuk a generátorrendszer rangját, így megkapjuk az altér dimenzióját.
- 2 Keresünk az altérben a dimenzióval megegyező elemszámú lineárisan független vektorrendszert.

Az előző két lépés egy Gauss-eliminációval megoldható.

Példa

Adjunk meg bázist a

$$[(1, -1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1), (-1, 2, 3, 2), (-1, 3, 5, 3), (-2, 4, 4, 3)]$$

altérben.

Írjuk be a generátorrendszer vektorait egy mátrix soraiba, majd Gauss-eliminációval hozzuk lépcsős alakra.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a generátorrendszer rangja 3, így a generált altér dimenziója is 3.

Bázist a következőképpen kapunk: a Gauss-elimináció során kapott lépcsős mátrix nem-0 sorvektorainak száma épp az altér dimenziója, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, hiszen egy lépcsős mátrix nem-0 sorai. Ezek a sorvektorok elemei az altérnek, ugyanis a Gauss-elimináció során keletkező mátrixok sorai mindig ugyanebben az altérben vannak (csak a vektorok lineáris kombinációját képezzük). Tehát a

$$(1, -1, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 2, 1)$$

vektorrendszer szükségképpen bázisa az altérnek.

Állítás

Legyen U_1, U_2 két altere a V vektortérnek, amelyre $U_1 \subseteq U_2$.
Ekkor

- $\dim U_1 \leq \dim U_2$,
- $U_1 = U_2$ pontosan akkor, ha $\dim U_1 = \dim U_2$

Az előző észrevétel segítségével könnyebben eldönthető két altérrel, hogy megegyeznek-e. Először meg kell határozni a dimenziójukat, majd el kell dönteni, hogy az egyik részhalmaza-e a másiknak.

Alterek dimenziótétele

Legyen U_1, U_2 két altere V -nek. Ekkor

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Tétel

Ha $U_1 = [v_1, \dots, v_n]$ és $U_2 = [u_1, \dots, u_m]$ alterek V -ben, akkor

$$U_1 + U_2 = [v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m].$$

Alterek egyenlősége

Két altér egyenlőségét a következőképpen el lehet dönteni:

- 1 határozzuk meg a két altér dimenzióját;
- 2 ha az alterek dimenziói megegyeznek, akkor határozzuk meg az összegük dimenzióját;
- 3 pontosan akkor egyezik meg a két altér, ha az összegük dimenziója megegyezik az alterek dimenziójával.

Példa

Legyenek $U_1 = [(1, -1, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 4)]$ és $U_2 = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$ alterek $\mathbb{R}^4$ -ben. Igaz-e, hogy $U_1 = U_2$?

Kiszámítjuk az U_1 altér dimenzióját:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U_1 generátorrendszerének rangja 3, így $\dim U_1 = 3$. A lépcsős mátrix nem-0 sorai megadják U_1 egy bázisát.

Az U_2 dimenzióját is meghatározzuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Így $\dim U_2 = 3$, és a mátrix sorai U_2 egy bázisát adják.

Most vizsgáljuk az alterek összegének dimenzióját. A két altér bázisainak uniója generálja az alterek összegét:

$$U_1 + U_2 = [(1, -1, 1, 2), (0, 1, 2, 4), (0, 0, -2, -6), \\ (1, -1, 1, 2), (0, 1, 0, -2), (0, 0, 2, 6)].$$

Mivel a dimenzió kiszámításához a generátorrendszer rangját fogjuk meghatározni, azaz a lineárisan független vektorrendszer maximális elemszámát, ezért a generátorrendszerben szereplő azonos, illetve számszoros vektorok közül elég az egyiket tekinteni.

Kiszámítjuk az $U_1 + U_2$ dimenzióját:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így $\dim(U_1 + U_2) = 3 = \dim U_1 = \dim U_2$, tehát U_1 és U_2 alterek megegyeznek.

Ha a V vektortér egy bázisa $v_1, \dots, v_n$, akkor bármely v vektor előáll ezen bázis vektorainak lineáris kombinációjaként (hiszen a bázis generátorrendszer), ugyanakkor ez a lineáris kombináció egyértelmű (mert a bázis lineárisan független vektorrendszer is).

Definíció

Legyen V vektortér egy bázisa $v_1, \dots, v_n$. Ekkor bármely $v \in V$ vektor egyértelműen előáll a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ezen lineáris kombináció együtthatóit a v vektor $v_1, \dots, v_n$ bázisban vett koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés

Egy vektor koordinátái függenek a bázis megválasztásától, azaz különböző bázisokban mások a koordináták.

Példa

Igazoljuk, hogy az $(1, -1, 2), (-2, 3, 1), (1, 0, 1)$ vektorrendszer bázisa $\mathbb{R}^3$ -nek. Továbbá adjuk meg az $(1, 1, 1)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

A koordináták meghatározásához meg kell adni a következő lineáris kombináció esetén az együtthatók értékét:

$$(1, 1, 1) = x_1(1, -1, 2) + x_2(-2, 3, 1) + x_3(1, 0, 1).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció során kiszámoltuk a vektorrendszer rangját is, ami 3. Mivel a rang 3, és a vektorrendszer elemszáma is 3, ezért a vektorrendszer lineárisan független. Ugyanakkor $\mathbb{R}^3$ dimenziója 3, ezért a 3 elemű lineárisan független vektorrendszer bázisa lesz.

A koordináták a diagonális alakra hozott mátrixból egyből leolvashatók: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{11}{6})$.

Összefoglalás

Legyen V n -dimenziós vektortér, és legyen a $v_1, \dots, v_k$ V -beli vektorrendszer rangja r . A következők teljesülnek a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszerre:

- ha $k < n$, akkor nem generátorrendszere V -nek,
- ha $k > n$, akkor nem lineárisan független,
- lineárisan független $\Leftrightarrow r = k$,
- generátorrendszere V -nek $\Leftrightarrow r = n$,
- bázisa V -nek $\Leftrightarrow k = r = n$.

Megjegyzés

A fenti vektorrendszer esetén természetesen csak $r \leq k$ és $r \leq n$ lehetséges.

1. Gondolkodnivaló

Legyenek a v vektor koordinátái a $v_1, \dots, v_n$ bázisban: $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

2. Gondolkodnivaló

Igazoljuk, hogy egy vektortér bármely lineárisan független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

3. Gondolkodnivaló

Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az

- (a) $(1, 2, -1), (-2, -3, 5), (3, 4, x)$ vektorrendszer bázist alkosson $\mathbb{R}^3$ -ben.
- (b) $(1, -4, 0, 8), (0, -2, 3, 1), (2, -5, x, 4)$ vektorrendszer NE alkosson bázist $\mathbb{R}^4$ -ben.