

5. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 29. – 36. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n \times n}$ (valós $n \times n$ -es mátrixok) vektortérben az alábbi részhalmazok?

- $U_1 = \{A : |A| = 0\};$
- $U_2 = \{A : |A| \neq 0\};$
- $U_3 = \{A : A^T = A\}.$

Használjuk a következő tételt, ami az előző előadáson szerepelt:

Tétel

A V vektortér U nemüres részhalmza altere V -nek $\Leftrightarrow$ ha U zárt a V -beli összeadásra, és a skalárral való szorzásra nézve.

Az előző tétel szerint bárhogy is veszünk U -ból két elemet, az összegüknek szintén U -ban kell lennie. Továbbá bárhogy veszünk egy valós számot, és U egy tetszőleges elemét, ezek szorzata is eleme U -nak.

- $U_1 = \{A : |A| = 0\}.$

Az U_1 nem alkot alteret, ezt a következő példa mutatja:

Példa

Legyen $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, és $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ekkor

$|A_1| = |A_2| = 0$, így $A_1, A_2 \in U_1$. De $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, amelyre $|A_1 + A_2| = 1$, így U_1 nem zárt az összeadásra.

- $U_2 = \{A : |A| \neq 0\}$.

Az U_2 sem alkot alteret, ezt a következő példa mutatja:

Példa

Legyen $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, és $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ekkor

$|A_1| = |A_2| = 1$, így $A_1, A_2 \in U_2$. De $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
amelyre $|A_1 + A_2| = 0$, így $A_1 + A_2 \notin U_2$, tehát U_2 nem zárt az
összeadásra.

- $U_3 = \{A : A^T = A\}$

Jelölés

Használjuk a következő jelölést: $A = (a_{ij})$.

Ekkor $A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Vizsgáljuk először, hogy U_3 zárt-e az összeadásra.

Legyen $A, B \in U_3$, vizsgáljuk, hogy $A + B$ eleme-e U_3 -nak.

$$\begin{aligned}(A + B)^T &= ((a_{ij}) + (b_{ij}))^T = ((a_{ij} + b_{ij}))^T = ((a_{ji} + b_{ji})) = \\ &= (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^T + B^T = A + B.\end{aligned}$$

Tehát $A + B \in U_3$ teljesül, így U_3 zárt az összeadásra.

Vizsgáljuk, hogy U_3 zárt-e a skalárral való szorzásra.

Legyen $A \in U_3$, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Vizsgáljuk, hogy λA eleme-e U_3 -nak.

$$(\lambda A)^T = (\lambda(a_{ij}))^T = (\lambda a_{ij})^T = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a_{ji}) = \lambda A^T = \lambda A.$$

Vizsgáljuk, hogy U_3 zárt-e a skalárral való szorzásra.

Legyen $A \in U_3$, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Vizsgáljuk, hogy λA eleme-e U_3 -nak.

$$(\lambda A)^T = (\lambda(a_{ij}))^T = (\lambda a_{ij})^T = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a_{ji}) = \lambda A^T = \lambda A.$$

Így $\lambda A \in U_3$, tehát U_3 zárt a skalárral való szorzásra is.

U_3 zárt az összeadásra, és a skalárral való szorzásra nézve, így alteret alkot.

2. Gondolkodnivaló

Legyen V valós vektortér, és $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Igazoljuk, hogy
ha $\lambda v = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$.

Bizonyítás: Ha $\lambda = 0$, akkor $0v = \underline{0}$ teljesül.

Ha $\lambda \neq 0$, akkor $\frac{1}{\lambda}$ létezik. Ekkor a $\lambda v = \underline{0}$ egyenlőséget $\frac{1}{\lambda}$ -val szorozva kapjuk:

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda}\underline{0}.$$

A jobb oldal $\underline{0}$, a bal oldal pedig két vektortér axióma alkalmazásával átalakítható:

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda v) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)v = 1v = v.$$

Tehát $v = \underline{0}$, ezzel az állítást beláttuk.

3. Gondolkodnivaló

Legyen V valós vektortér és legyen $v_1, v_2, v_3 \in V$.

Teljesül-e a $[v_1, v_2, v_3] = [v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 + v_3]$ egyenlőség?

A két altér egyenlőségéhez azt kell belátni, hogy pontosan ugyanazok az elemeik, tehát ami a bal oldalnak eleme, az a jobbnak is, és fordítva. Valójában elég azt vizsgálni, hogy a generátorrendszer eleme-e az altérnek, hiszen az összes elem ezek lineáris kombinációjaként áll elő.

- 1 $v_1, v_2, v_3 \in [v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 + v_3]$ teljesül-e?
- 2 $v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 + v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$ teljesül-e?

A második feltétel triviálisan teljesül, hiszen a kérdéses vektorok mind v_1, v_2, v_3 lineáris kombinációi.

Az első feltételnél v_1 vektor eleme az altérnek, ha találunk x_1, x_2, x_3 skalárokat, amelyre $v_1 = x_1(v_1 + v_2) + x_2(v_1 - v_3) + x_3(v_2 + v_3)$. A zárójeleket felbontva, és átrendezve:

$$v_1 = (x_1 + x_2)v_1 + (x_1 + x_3)v_2 + (-x_2 + x_3)v_3.$$

Olyan x_1, x_2, x_3 -at keresünk, hogy a fenti egyenlőség bármely V vektortér tetszőleges v_1, v_2, v_3 vektorára teljesüljön. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, így $[v_1, v_2, v_3] \neq [v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 + v_3]$.

Lineáris függetlenség

Definíció

Legyen V valós vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$ -ból következik, hogy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, azaz a vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\underline{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Definíció

Vektorok olyan lineáris kombinációját, ahol minden skalár nulla *triviális lineáris kombinációnak* nevezzük.

Példa

- Az $(1, 1, 1), (0, 0, 0)$ vektorrendszer lineárisan függő, mert

$$0 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

- Az $(1, 1, 1), (1, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan függő, mert

$$1 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

- Az $(1, 1, 1), (0.3, 0.3, 0.3)$ vektorrendszer lineárisan függő, mert

$$(-0.3) \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (0.3, 0.3, 0.3) = (0, 0, 0).$$

Lineárisan függő vektorrendszer

A fenti példák könnyen általánosíthatók:

Tétel

Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.

Tétel

Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Tétel

Ha egy vektorrendszer egy vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Észrevétel

Az utolsó tételből következik a többi.

Példa

- Az $(1, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\lambda(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, akkor szükségképpen $\lambda = 0$.
- Az $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, és ekkor a második miatt $\beta = 0$.

Megjegyzés

- A lépcsős alakú mátrix nem-0 soraiból alkotott vektorrendszer lineárisan független.
- Gauss-elimináció segítségével el lehet dönteni egy vektorrendszerről, hogy lineárisan független.

Példa

Lineárisan független-e az

$(1, -1, 1, 1), (1, 0, -1, 1), (-1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 3)$ vektorrendszer?

Azt kell eldönteni, hogy van-e olyan (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyes, amely különbözik $(0, 0, 0, 0)$ -tól, azonban

$$x_1(1, -1, 1, 1) + x_2(1, 0, -1, 1) + x_3(-1, 1, 1, 1) + x_4(1, 0, 1, 3) = (0, 0, 0, 0).$$

Az x_i -kkel beszorozva, majd a vektorokat összegezve a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\-x_1 + x_3 &= 0 \\x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Ha az előző egyenletrendszernek van a $(0, 0, 0, 0)$ -n kívül egyéb megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan függő, ha nincs, akkor lineárisan független.

Emlékeztető

Egy lineáris egyenletrendszernek 3 féle megoldása lehet:

- 1 nincs megoldás,
- 2 pontosan 1 megoldás van (ha nincs szabad változó),
- 3 végtelen sok megoldás van (ha van szabad változó)

Az első eset nem állhat fenn ennél a lineáris egyenletrendszernél, mert a $(0, 0, 0, 0)$ megoldása, így csak azt kell eldöntenünk, hogy van-e szabad változó.

Hasonlóan a generáláshoz az egyenletrendszer bővített mátrixát az eredeti vektorokból közvetlenül is megkaphatjuk, ha az OSZLOPOKBA beírjuk a vektorokat. A bővített mátrixot lépcsős alakra hozzuk:

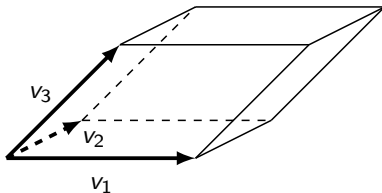
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

tehát van szabad változó, ezért végtelen sok megoldás van. Mivel nem a $(0,0,0,0)$ az egyetlen megoldás, így a vektorrendszer lineárisan függő.

Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^n$ -ben

- Ha $v_2 \neq \underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^n$ -ben a v_1, v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amelyre $v_1 = \lambda v_2$. Azaz a két vektor nem esik egy egyenesbe.
- A térben a v_1, v_2, v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba.



- $\mathbb{R}^3$ -ben a paralelepipedon térfogata kiszámítható, a v_i vektorokból kialakított 3×3 mátrix determinánsának segítségével.

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ lineárisan független.}$$

- Az előzőt általánosítva kapjuk: $\mathbb{R}^n$ -ben egy n -elemű vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorokból alkotott $n \times n$ -es mátrix determinánsa nem 0.

Tétel

Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere is az.

Indoklás: Ha az összes vektorból nem lehet előállítani a $\underline{0}$ vektort a triviálistól különböző módon, akkor kevesebb vektorból sem.

Következmény

Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a teljes vektorrendszer is az.

Tétel

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha valamely vektora előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

„ $\Rightarrow$ ” bizonyítása: Tegyük fel, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan függő, vagyis léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skalárok, hogy nem mindegyik 0, és

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}.$$

Tegyük fel, hogy $\alpha_i \neq 0$, ekkor átrendezve a fenti egyenlőséget

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

adódik, vagyis v_i előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Az előző tétel mutatja, hogy a lineáris függetlenség és a generátorrendszer fogalma között szoros kapcsolat van. A tétel a következőképpen is megfogalmazható:

Tétel

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha valamelyik vektora eleme a többi vektor által generált altérnek.

Definíció szerint egy vektorrendszer lineárisan független, ha a $\underline{0}$ vektor csak egyféleképpen állítható elő a vektorrendszer lineáris kombinációjaként. Valójában ez nem csak a $\underline{0}$ vektorra igaz:

Tétel

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektorrendszerből bármely vektor a vektortérből legfeljebb egyféleképpen állítható elő lineáris kombinációként.

A következő fogalom már igen közel áll a dimenzió fogalmához.

Vektorrendszer rangja

Egy lineárisan függő vektorrendszer részrendszerei között már lehetnek lineárisan függetlenek is, például az $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$ lineárisan függő, azonban az $(1, 1, 1)$ lineárisan független.

Definíció

Vektorrendszer *maximális lineárisan független részrendszerének* nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer lineárisan független maradjon.

Definíció

Vektorrendszer *rangjának* nevezzük a maximális lineárisan független részrendszerének elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r , ha r db lineárisan független vektor kiválasztható a vektorrendszerből, azonban $r + 1$ db már nem.

Példa

- A $(0, 0, 0)$ vektorrendszer rangja 0.
- Az $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ vektorrendszer rangja 1.
- Az $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (2, -2, 2)$ vektorrendszer rangja 2.
Maximális lineárisan független részrendszere az $(1, 1, 1), (1, -1, 1)$. De maximális lineárisan független részrendszere az $(1, 1, 1), (2, -2, 2)$ is.
- Az $(1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2)$ vektorrendszer rangja 3, hiszen maximális lineárisan független részrendszere önmaga.

Észrevétel

Egy n tagú vektorrendszer rangja nem lehet nagyobb n -nél, és pontosan akkor n , ha a vektorrendszer lineárisan független.

Tétel

Vektorrendszer bármely maximális lineárisan független részrendszerének lineáris kombinációjaként előáll a vektorrendszer többi vektora.

Bizonyítás: Legyen a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszere $u_1, \dots, u_r$. Ekkor bármely, a kiválasztott vektoroktól különböző v vektort hozzávéve a részrendszerhez, már lineárisan függő részrendszert kapunk: $u_1, \dots, u_r, v$ lineárisan függő.

Mivel $u_1, \dots, u_r$ lineárisan független, ez csak úgy fordulhat elő, ha v előáll az $u_1, \dots, u_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Tétel

Ha egy vektorrendszer rangja r , akkor ha kiválasztunk belőle r db lineárisan független vektort, akkor a vektorrendszer minden tagja előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Tétel

Vektorrendszer rangja nem változik, ha bővítjük egy olyan vektorral, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.

Tétel

Vektorrendszer rangja nem változik, ha elhagyunk belőle egy olyan vektort, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Tétel

Vektorrendszer rangja nem változik meg, ha valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának többszörösét, vagy ha valamely vektort 0 -tól különböző valós számmal szorozzuk meg.

Alaptétel

Ha egy $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előállnak az $u_1, \dots, u_k$ vektorok, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja kisebb vagy egyenlő, mint a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangja.

A rang kiszámítása

Az $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszer rangját meghatározhatjuk Gauss-eliminációval.

- A vektorrendszer vektorait beírjuk egy mátrix soraiba.
- Gauss-eliminációt hajtunk végre a mátrixon.
- A lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

Példa

Számítsuk ki az

$$(1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, 1, 1, 1), \\ (-1, 2, 3, 3), (0, -1, 0, 0)$$

vektorrendszer rangját.

Beírjuk a vektorokat egy mátrix soraiba.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gauss-eliminációt hajtunk végre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a vektorrendszer rangja 3.

Egy maximális lineárisan független részrendszere például:

$$(1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, 1, 1, 1).$$

Észrevétel

A rangszámítás segítségével most már könnyen eldönthető tetszőleges $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerrel, hogy lineárisan független-e:

- Számoljuk ki a $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer rangját.
- Ha a rang kisebb, mint k , akkor lineárisan függő, ha egyenlő k -val, akkor lineárisan független. (k -nál több nem lehet!!!)

1. Gondolkodnivaló

Legyen V valós számtest feletti vektortér. Igazolja, hogy ha a $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vektorrendszerben pontosan egy vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor ez a vektor a nullvektor.

2. Gondolkodnivaló

Legyenek u , v és w lineárisan független vektorok valamely V vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

- (a) $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$;
- (b) $u + 3v + 2w$, $2u + w$, $u + v + w$.

3. Gondolkodnivaló

Igazak-e a következő állítások?

- (a) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.
- (b) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V -ben.
- (c) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i -re v_i előáll a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.