

4. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 24. – 28. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 3x_2 + (a-4)x_3 &= 4 \\ x_1 + (a^2 - a - 1)x_3 &= a - 4\end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & a-4 & 4 \\ 1 & 0 & a^2-a-1 & a-4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-3 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & a^2 - a - 3 & a - 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a + 1 \end{array} \right).$$

Felhasználva, hogy $a^2 - 2a - 3 = (a - 3)(a + 1)$ a mátrix utolsó sorát a következőképpen írhatjuk fel egyenlet formájában:

$$(a - 3)(a + 1)x_3 = a + 1. \quad (*)$$

Vizsgáljuk, hogy $(a - 3)(a + 1) = 0$ mikor teljesül.

1. eset: $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$.

A (*) egyenletre a következőt kapjuk:

$$0 \cdot x_3 = 4 \implies 0 = 4.$$

Tehát ebben az esetben ellentmondó egyenletet kaptunk, **nincs megoldás**.

2. eset: $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

A (*) egyenletre a következőt kapjuk:

$$0 \cdot x_3 = 0 \implies 0 = 0.$$

Tehát ebben az esetben az x_3 szabad ismeretlen, így **végtelen sok megoldás** van. A bővített mátrix második sorából az $x_2 - x_3 = -2$ egyenletet kapjuk, amelyből x_2 kifejezhető: $x_2 = -2 + x_3$. Az első sorból $x_1 = x_2 - 2x_3 - 3$, ahova az x_2 -re kapott kifejezést behelyettesítve: $x_1 = -5 - x_3$.

Tehát $a = -1$ esetén a megoldás vektor alakban:

$$(-5 - x_3, -2 + x_3, x_3),$$

ahol x_3 tetszőleges valós szám lehet.

Most nézzük azt az esetet, amikor $(a - 3)(a + 1) \neq 0$.

3. eset: $(a - 3)(a + 1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$ és $a \neq -1$.

A (*) egyenletből ebben az esetben kifejezhetjük x_3 -at, majd a lépcsős mátrix többi sorából x_2 -t illetve x_1 -et:

$$x_3 = \frac{a+1}{(a-3)(a+1)} = \frac{1}{a-3},$$

$$x_2 = -2 - \frac{a}{a-3},$$

$$x_1 = -5 - \frac{a+2}{a-3}.$$

Tehát, ha $a \neq 3$ és $a \neq -1$, akkor a megoldás vektor alakban:

$$\left(-5 - \frac{a+2}{a-3}, -2 - \frac{a}{a-3}, \frac{1}{a-3} \right).$$

2. Gondolkodnivaló

Igazak-e a következő állítások? (Ha igen, bizonyítsuk, ha nem, adjunk rá ellenpéldát.)

- Ha egy lineáris egyenletrendszerben annyi egyenlet szerepel, mint ahány változó, akkor mindig van megoldás.
- Ha egy lineáris egyenletrendszer kevesebb egyenletet tartalmaz, mint a változók száma, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
- Ha egy lineáris egyenletrendszerben több egyenlet szerepel, mint a változók száma, akkor végtelen sok megoldása van.

- Az 1. állítás nem igaz, azaz ha egy lineáris egyenletrendszerben annyi egyenlet szerepel, mint ahány változó, akkor nem biztos, hogy van megoldás. Például az

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 7\end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása.

- A 2. állítás igaz, azaz ha egy lineáris egyenletrendszer kevesebb egyenletet tartalmaz, mint a változók száma, akkor nem lehet pontosan egy megoldás. Ugyanis a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixában kevesebb sor lesz, mint ahány változó van, így nem lehet mindegyik változó kötött. Tehát nem lehet pontosan egy megoldás.

- A 3. állítás nem igaz, azaz ha egy lineáris egyenletrendszerben több egyenlet szerepel, mint a változók száma, akkor nem biztos, hogy végtelen sok megoldása van. Például az

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 4\end{aligned}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. De az is előfordulhat ilyen feltételek mellett, hogy nincs megoldás.

Például:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 5.\end{aligned}$$

3. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg a következő n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \end{array}$$

Először vizsgáljuk meg, hogy szabályos-e a lineáris egyenletrendszer. Ugyanannyi ismeretlent tartalmaz, mint egyenletet, nézzük meg, hogy nulla-e az együtthatókból álló determináns. Vonjuk ki a determináns utolsó sorát az összes többiből:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a főátló felett minden elem 0 legyen, adjuk hozzá az utolsó oszlophoz az összes többit.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 + (n-1) \end{vmatrix}.$$

Ekkor a determináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata:

$$D = 1^n \cdot (2 + n - 1) = n + 1 \neq 0.$$

A lineáris egyenletrendszer szabályos, így alkalmazható a Cramer-szabály, az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. A megoldásokat úgy kapjuk meg, hogy a D determinánsban az oszlopok helyére rendre a jobboldali konstansokat helyettesítjük.

Az első oszlop helyére beírjuk a jobboldali konstansokból álló oszlopot. Ha az első oszlopot kivonjuk az összes többiből, akkor egy felső trianguláris mátrixot kapunk, értéke a főátlóban lévő elemek szorzata:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Így a Cramer-szabály alapján $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{n+1}$. A többi ismeretlen hasonlóan számolható, mivel $D_2 = D_3 = \dots = D_n = 1$ teljesül, így $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{1}{n+1}$ a lineáris egyenletrendszer megoldása.

Vektortér

Definíció

Valós vektortérnek nevezünk egy V halmazt, ha

- elemeit össze lehet adni (V -n értelmezett egy összeadás: $+$),
- elemeit meg lehet valós számokkal (skalárokkal) szorozni: $\lambda \cdot v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$),
- az összeadás és a skalárral való szorzás teljesíti a következő axiómákat:
 - az összeadás asszociatív: bármely $u, v, w \in V$ esetén $(u + v) + w = u + (v + w)$,
 - az összeadás kommutatív: bármely $u, v \in V$ esetén $u + v = v + u$,
 - az összeadásnak van egységeleme: létezik egy olyan $\underline{0}$ -val jelölt eleme V -nek, hogy bármely $u \in V$ esetén $\underline{0} + u = u$,
 - minden vektornak van additív inverze: bármely $u \in V$ esetén létezik $-u \in V$, amelyre $u + (-u) = \underline{0}$,

Definíció folyt.

...

- $1 \cdot v = v$ bármely $v \in V$ esetén,
- $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén,
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén,
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u, v \in V$ esetén.

A fenti definíció az egyik "legsikeresebb" matematikai definíció: elég általános ahhoz, hogy a vektorterek a matematika minden területén fontos szerephez jussanak, ugyanakkor (majdnem) elég erős ahhoz, hogy a geometriai tér fogalmát kellőképpen megragadja.

Jelölés

A továbbiakban V -vel egy tetszőleges valós vektorteret fogunk jelölni.

Vektortér megadása

Egy V vektortér megadása nemcsak az elemek megadását jelenti, hanem egyben az összeadás és skalárral való szorzás műveletek megadását is.

Példák

Valós vektorterek például a következők:

- a sík vagy a tér helyvektorai a szokásos összeadásra és valós számmal történő szorzásra nézve;
- a valós szám n -esek halmaza a komponensenkénti összeadásra, és a komponensenkénti valós számmal való szorzásra nézve, ezt a vektorteret $\mathbb{R}^n$ -nel jelöljük;
- a valós együtthatós polinomok a szokásos összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve.

Megjegyzés

Mi nagyrészt $\mathbb{R}^n$ -ben fogunk számolni.

$\mathbb{R}^n$ -ben az összeadás komponensenként történik, például $\mathbb{R}^5$ -ben (a vektoroknak 5 komponense van):

$$(1, -1, 2, 2, 1) + (0, 1, -1, 2, 3) = (1, 0, 1, 4, 4).$$

A skalárral való szorzás $\mathbb{R}^5$ -ben:

$$2 \cdot (1, -1, 2, 2, 1) = (2, -2, 4, 4, 2).$$

A kettőt kombinálhatjuk is:

$$2 \cdot (1, -1, 2, 2, 1) + (0, 1, -1, 2, 3) = (2, -1, 3, 6, 5).$$

Ezekben a vektorterekben a nullvektor a csupa 0-vektor, például $\mathbb{R}^7$ -ben:

$$\underline{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Az additív inverz vektor a (-1) -szeres, például ha $\mathbb{R}^4$ -ben $u = (1, -1, 2, 3)$, akkor $-u = -(1, -1, 2, 3) = (-1, 1, -2, -3)$, tehát $u + (-u) = \underline{0}$ teljesül.

Az axiómák közvetlen alkalmazásával egyszerűen igazolhatók a következők tetszőleges V valós vektortér esetén:

- az összeadás egységeleme egyértelműen meghatározott, azaz csak egy $\underline{0}$ létezik,
- az additív inverz egyértelmű, azaz bármely u esetén pontosan egyetlen v létezik, melyre $u + v = \underline{0}$ (természetesen ekkor $v = -u$),
- bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén $\lambda \underline{0} = \underline{0}$;
- bármely $v \in V$ vektor esetén $0v = \underline{0}$;
- bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és $v \in V$ vektor esetén $\lambda v = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$;
- bármely $v \in V$ vektorra $-1v = -v$;
- bármely $v \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra $(-\lambda)v = -(\lambda v)$.

Igazoljuk az elemi tulajdonságok közül a következőt:

Állítás

Bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén $\lambda \underline{0} = \underline{0}$.

Bizonyítás: Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár. Ekkor

$$\lambda \underline{0} = \lambda(\underline{0} + \underline{0}),$$

mert az $\underline{0}$ vektor az összeadás egységeleme, ezért $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$.

$$\lambda(\underline{0} + \underline{0}) = \lambda \underline{0} + \lambda \underline{0},$$

az egyik axióma szerint. Tehát összességében:

$$\lambda \underline{0} = \lambda \underline{0} + \lambda \underline{0}.$$

Az additív inverz létezése miatt kivonhatunk mindkét oldalból $\lambda \underline{0}$ -t:

$$\underline{0} = \lambda \underline{0},$$

ezzel be is láttuk az állítást.

Definíció

A V vektortér U nemüres részhalmaza *altér* V -nek, ha maga az U is vektortér a V -ben definiált műveletekre nézve. Jelölés: $U \leq V$

Tétel

A V vektortér U nemüres részhalmaza *altér* V -nek $\Leftrightarrow$ ha U zárt a V -beli összeadásra, és a skalárral való szorzásra nézve. (Azaz bármely két U -beli vektor összege is U -ban lesz, illetve tetszőleges valós számmal szorozva bármely U -beli vektort ismét U -beli vektort kapunk.)

Következmény

Ha $\underline{0} \notin U$, akkor U nem altér.

Példák alterekre

- Tetszőleges V vektortérnek mindig altere a $\{0\}$, valamint a teljes V vektortér.
- A sík helyvektorai közül, amelyek egy origón átmenő rögzített egyenesbe esnek, alteret alkotnak. Ugyanis ezen vektorok összege, és valós számszorosa is ebbe a rögzített egyenesbe esik.
- A valós együtthatós polinomok terében alteret alkotnak a legfeljebb 5-öd fokú polinomok, hiszen ilyen polinomok összege, illetve skalárszorosa is legfeljebb 5-öd fokú polinom.

Megjegyzés

A síkon a pozitív síknegyedbe eső vektorok nem alkotnak alteret, bár az összeadásra nézve zártak, a skalárral való szorzásra nézve nem.

Definíció

Ha U_1, U_2 alterei a V vektortérnek, akkor az

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

halmaz is altere V -nek. Ezt az alteret nevezzük az U_1 és U_2 *alterek összegének*.

Tétel

Ha U_1, U_2 alterei V -nek, akkor $U_1 \cap U_2$ is altere V -nek.

Definíció

A $v_1, \dots, v_n$ vektorok $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett *lineáris kombinációja* az

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

vektor.

Példa

Az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektoroknak egy lineáris kombinációja:

$$2(1, 1, -1) - (0, 1, 1) + 2(0, 1, 1) = (2, 3, -1),$$

vagyis a $(2, 3, -1)$ vektor előáll az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Észrevétel

Ha U altere a V vektortérnek, akkor bármely $v_1, \dots, v_n \in U$ vektorrendszer tetszőleges lineáris kombinációja is U -beli vektor.

Cél: a dimenzió

A sík, illetve a tér egy fontos paramétere a dimenziója, ezért természetes, hogy ezt megpróbáljuk tetszőleges vektortér esetén definiálni.

1. Megközelítés

A síkon 2 vektor kell ahhoz, hogy ezek felhasználásával az összes többi előállítsuk a vektorok összeadása és skalárral való szorzása segítségével. a térben azonban 3 vektor kell ehhez. Ezen gondolatmenet általánosítása vezet a *generátorrendszer* fogalmához.

2. Megközelítés

A síkon bárhogy adunk meg 3 vektort, azok között lesz olyan, amely a másik kettő által kifeszített síknak (vagy egyenesnek) az eleme, míg térben ez nem teljesül. Ezen gondolatmenet precízzé tétele vezet a *lineáris függetlenség* fogalmához.

Generálás, generátorrendszer

Definíció

A $v_1, \dots, v_n$ vektorok által *generált altér* a legszűkebb olyan altér, amely tartalmazza $v_1, \dots, v_n$ -t. Jele: $[v_1, \dots, v_n]$.

Definíció

Az U altérnek a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer *generátorrendszere*, ha

$$U = [v_1, \dots, v_n].$$

Tétel

A $[v_1, \dots, v_n]$ altér elemei éppen a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineáris kombinációiként előálló vektorok.

Példa

Döntsük el, hogy a $(2, 0, 3)$ vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér $[(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ alterének.

Az előző tétel szerint $(2, 0, 3) \in [(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ pontosan akkor teljesül, ha a $(2, 0, 3)$ vektor előáll az $(1, -1, 1), (1, 1, 2)$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis ha van olyan x_1, x_2 valós szám, hogy

$$(2, 0, 3) = x_1(1, -1, 1) + x_2(1, 1, 2).$$

Elvégezve az egyenlet jobb oldalán az x_1 -gyel és x_2 -vel való szorzást, illetve az összeadást:

$$(2, 0, 3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2).$$

$$(2, 0, 3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2).$$

$\mathbb{R}^3$ -ben két vektor csak úgy lehet egyenlő, ha minden komponensük megegyezik, tehát

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Meg kell vizsgálni, hogy a fenti egyenletrendszernek van-e megoldása. Ha van, akkor $(2, 0, 3)$ eleme az altérnek, ha nincs, akkor nem eleme.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Természetesen az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. A bővített mátrixot lépcsős alakra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{array}$$

Tehát az egyenletrendszernek van megoldása, így a $(2, 0, 3)$ vektor eleme az altérnek. $(2, 0, 3) = 1 \cdot (1, -1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 2)$.

Észrevétel

A feladat adataiból a bővített mátrix egyből felírható.

A feladat a következő volt:

Döntsük el, hogy a $(2, 0, 3)$ vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér $[(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ alterének.

A bővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Azaz a bővített mátrix első két OSZLOPÁT a generáló vektorok adják, a konstans oszlopát pedig a kérdéses vektor.

Példa

Generátorrendszere-e az

$$(1, -1, 1, 2), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek?

Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy bármely $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vektor esetén teljesül-e, hogy

$$(a, b, c, d) \in [(1, -1, 1, 2), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)].$$

$$(a, b, c, d) \in [(1, -1, 1, 2), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)]???$$

A korábbi példában látott módon ez a következő bővített mátrix Gauss-eliminációjához vezet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 2 & 0 & 0 & d \end{array} \right).$$

Észrevétel

A bővített mátrix Gauss-eliminációja során a bal oldalon mindenképpen kialakul egy csupa 0 sor, hiszen több sor szerepel ott, mint oszlop. Ezek után a, b, c, d értéke biztosan választható úgy, hogy az adott sor jobb oldalán ne 0 szerepeljen.

Az előző észrevétel alapján az a, b, c, d értéke választható úgy, hogy a bővített mátrix lépcsős alakjában ellentmondó sor szerepeljen. Tehát nem minden $\mathbb{R}^4$ -beli vektor állítható elő, ezért a kérdéses vektorrendszer nem generátorrendszer.

Az előző gondolatmenet MINDEN olyan esetben működik, amikor a vektoroknak több komponensük van (az előző példában 4), mint ahány elemű a vektorrendszer (az előző példában 3).

Megjegyzés

Ha egy vektorrendszer elemszáma kevesebb, mint a vektortérben szereplő vektorok komponenseinek száma, akkor a vektorrendszer nem lehet a vektortér generátorrendszere.

1. Gondolkodnivaló

Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n \times n}$ (valós $n \times n$ -es mátrixok) vektortérben az alábbi részhalmazok?

- $U_1 = \{A : |A| = 0\};$
- $U_2 = \{A : |A| \neq 0\};$
- $U_3 = \{A : A^T = A\}.$

2. Gondolkodnivaló

Legyen V valós vektortér, és $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Igazoljuk, hogy
ha $\lambda v = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$.

3. Gondolkodnivaló

Legyen V valós vektortér és legyen $v_1, v_2, v_3 \in V$.

Teljesül-e a $[v_1, v_2, v_3] = [v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 + v_3]$ egyenlőség?