

3. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 47. – 50. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Determinánselméleti tételek segítségével határozzuk meg a következő $n \times n$ -es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & \\ 3 & 1 & 1 & 3 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \\ n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Vonjuk ki az első sort az összes többi sorból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & \\ 3 & 1 & 1 & 3 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \\ n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 2 & 0 & 0 & 2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

Ezután fejtsük ki a determinánst az utolsó sora szerint:

$$= (n-1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0.$$

A kifejtés után kapott $(n - 1)$ -ed rendű determináns trianguláris, így a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata:

$$(n - 1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (n - 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) = (-1)^{n+1} \cdot (n - 1)!$$

2. Gondolkodnivaló

Determinánselméleti tételek segítségével határozzuk meg a következő $n \times n$ -es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Kifejtjük a determinánst az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 3 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ismét kifejtjük az első sor szerint, és így tovább:

$$\begin{aligned} (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 3 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 3 \\ 0 & \dots & 4 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+n} (-1)^{1+(n-1)} \dots (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot |n| = \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^n \dots (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n. \end{aligned}$$

A -1 kitevőjét összegezve:

$$2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+3)n}{2}.$$

Tehát

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+3)n}{2}} \cdot n!$$

Azaz, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, akkor a -1 kitevője páros, így a determináns értékére $n!$ -t kapunk.

Ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$, akkor a -1 kitevője páratlan, így a determináns $-n!$ lesz.

2. Gondolkodnivaló

Másik megoldás.

A determináns sorcserével diagonális alakra hozható. Egy sorcsere esetén a determináns (-1) -szeresére változik. Például 4×4 -es esetben:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

Általában, ha $n = 2m$, vagy $n = 2m + 1$, akkor m db sorcsere kell. Ezek után m paritásától függően vagy $-n!$ vagy $n!$ lesz a determináns értéke.

Összefoglalva: ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, akkor $n!$ a determináns értéke, ugyanis páros sok sorcserét hajtunk végre. Ha $n = 4k + 2$, vagy $n = 4k + 3$, akkor $-n!$ lesz a determináns.

Konkrét megoldás

A lineáris egyenletrendszer egy *konkrét megoldásán* egy olyan $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ szám m -est értünk, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe, minden egyenlőség teljesül.

Általános megoldás

A lineáris egyenletrendszer *általános megoldásán* az összes konkrét megoldás megadását értjük (ha van egyáltalán megoldás).

Példa

Adjuk meg a következő egyenletrendszer általános megoldását.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\x_1 - x_3 &= 2\end{aligned}$$

Konkrét megoldása: $(3, -1, 1)$.

Általános megoldás: $(2 + t, -1, t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

Hogyan kapjuk meg az általános megoldást?

Definíció

Lineáris egyenletrendszer *elemi átalakításai* a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- tetszőleges egyenlet szorzása 0-tól különböző valós számmal,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása.

Ezen elemi műveletek segítségével megoldhatók a lineáris egyenletrendszerek.

Elemi átalakításokat hajtunk végre az előző példában szereplő egyenletrendszeren

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_3 & = & 2. \end{array}$$

Adjuk a hozzá az első egyenlethez a második (-1) -szeresét:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & -1 \\ x_1 - x_3 & = & 2. \end{array}$$

Ekkor $x_2 = -1$, de x_1 és x_3 értéke nem egyértelműen meghatározott, csak a különbségük.

Definíció

Az

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer *mátrixa*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definíció

Az előző lineáris egyenletrendszer *bővített mátrixa*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Fontos megjegyezni, hogy a mátrix oszlopai az eredeti egyenletrendszer változóinak, illetve a konstans tagoknak felelnek meg.

A lineáris egyenletrendszer elemi átalakításainak a bővített mátrixa alábbi átalakításai felelnek meg:

Definíció

A bővített mátrix *elemi átalakításai* a következők:

- mátrix két sorának felcserélése,
- mátrix bármely sorának szorzása 0-tól különböző valós számmal,
- mátrix egyik sorához másik sora tetszőleges többszörösének hozzáadása.

A lineáris egyenletrendszer megoldásához a fenti átalakítások segítségével az egyenletrendszer bővített mátrixát egyszerűbb alakra hozzuk.

Definíció

Egy mátrixot *majdnem-lépcsős alakúnak* nevezünk, ha bármely sorában az első 0-tól különböző elem alatt csak 0-ák vannak.

Példa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definíció

Egy mátrixot *lépcsős alakúnak* nevezünk, ha majdnem-lépcsős alakú, valamint fentről lefele haladva a sorok első nem-0 elemei egyre később jelennek meg.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel

Elemi átalakításokkal bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

Indoklás: Minden sor első nem-0 elemével kinullázzuk az alatta lévő elemeket, hasonlóan a determináns nullázásához. Majd sorcserét hajtunk végre.

FONTOS!!!

A Gauss-elimináció nagyon hasonló ahhoz, mint amikor determinánst számolva nulláztunk. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Példa

Hozzuk lépcsős alakra a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1^* & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első sor első nem 0 elemével nullázzuk ki az alatta lévő elemeket.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Most a második sor első nem 0 elemével nullázzuk az alatta lévőket:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1^* & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1^* & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Majd a 3. sor első nem 0 elemével nullázzuk az alatta lévőket.

Ez már majdnem-lépcsős mátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ebből egy sorcserével lépcsős mátrixot kapunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Észrevételek

- Sok esetben feleslegesen nulláztuk ki lefelé az összes sort, hiszen az esetleges sorcserék miatt erre nem mindig van szükség - ugyanakkor egyenletrendszereknél sokszor hasznos, ha nemcsak lefele nullázzuk ki az elemeket.
- A lépcsős mátrix előállítása nem egyértelmű.

Megoldás menete

A lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk, a lépcsős alakból leolvassuk, hogy van-e megoldása, majd ha van, megadjuk az általános megoldását.

Tétel

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában szerepel ellentmondó sor, azaz a következő:

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$.

Ha a bővített mátrix lépcsős alakjában nincs ellentmondó sor, akkor az általános megoldást a szabad, illetve kötött változók segítségével kapjuk meg.

Definíció

Kötött változónak nevezzük a lépcsős alak soronkénti első nem-0 elemeinek megfelelő változó. A többi változó *szabad változó*.

Példa

Tegyük fel, hogy lineáris egyenletrendszer megoldása során a bővített mátrixát az alábbi lépcsős alakra hoztuk (az egyenletrendszer változóit $x_1, x_2, \dots, x_7$ jelölte). Határozzuk meg az általános megoldást.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right).$$

A *-gal megjelölt oszlopoknak megfelelő változók lesznek kötöttek, azaz x_2, x_4, x_6 , a többi pedig szabad változó: x_1, x_3, x_5, x_7 .

Megjegyzések

- Az általános megoldást úgy adjuk meg, hogy a lépcsős mátrixot felhasználva a kötött változókat kifejezzük a szabad változók segítségével.
- Fontos, hogy az általános megoldást megadó minden egyes egyenletben pontosan egy kötött változó szerepeljen, ezt úgy lehet elérni, hogy az utolsó sorral kezdve kell kifejezni a kötött változókat a szabadok segítségével.

Alkalmazzuk az előzőeket a példa esetén:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Utolsó sor visszaírva egyenletté:

$$x_6 + x_7 = 3,$$

x_6 kötött változó, így kifejezzük a fenti egyenletből:

$$x_6 = 3 - x_7.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right), x_6 = 3 - x_7$$

Az utolsó előtti sor visszaírva egyenletté:

$$2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 2.$$

Ebben túl sok a kötött változó (x_4 és x_6 is), ezért felhasználjuk, hogy $x_6 = 3 - x_7$, így kapjuk:

$$2x_4 + x_5 - (3 - x_7) + x_7 = 2.$$

Tehát

$$x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} x_6 = 3 - x_7 \\ x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7 \end{array}$$

Hasonlóan az előző esethez, az első egyenletből is kifejezhető x_2 felhasználva x_4 és x_6 -ra kapott összefüggéseket:

$$x_2 = \frac{5}{2} - x_3 - \frac{5}{2}x_5 - x_7.$$

Így az egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & \frac{5}{2} - x_3 - \frac{5}{2}x_5 - x_7, \\ x_4 & = & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7, \\ x_6 & = & 3 - x_7, \end{array}$$

ahol x_1, x_3, x_5, x_7 szabad változó, azaz tetszőleges valós számot felvehet értéként.

Észrevételek

- Ha a Gauss-elimináció során nemcsak lefelé nullázzuk ki az elemeket, hanem felfelé is, akkor a megoldás megadása során elkerülhetők az előzőekben szereplő visszahelyettesítgetések.
- Az általános megoldás vektorként is megadható.
- Az általános megoldásból úgy kapunk meg egy konkrét megoldást, hogy a szabad változóknak tetszőleges értéket adunk.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - x_3 - \frac{5}{2}x_5 - x_7,$$

$$x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7,$$

$$x_6 = 3 - x_7.$$

Az általános megoldás vektor alakban:

$$\left(x_1, \frac{5}{2} - x_3 - \frac{5}{2}x_5 - x_7, x_3, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7, x_5, 3 - x_7, x_7 \right).$$

Egy konkrét megoldás:

Legyen pl. $x_1 = 1, x_3 = 2, x_5 = 3, x_7 = 0$, ekkor:

$$(1, -7, 2, 1, 3, 3, 0).$$

FONTOS!!!

Az általános megoldást mindig ellenőrizzük le!

Hogyan ellenőrizhető az általános megoldás? A kötött változókra kapott formulákat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszerbe, és minden egyenletben azonosságot kell kapni.

A példa ellenőrzése

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1^* & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2} - x_3 - \frac{5}{2}x_5 - x_7, \\ x_4 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7, \\ x_6 &= 3 - x_7. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer második egyenletét ellenőrizzük. Az egyenlet:

$$2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 2.$$

Behelyettesítve a kötött változókat,

$$2\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_7\right) + x_5 - (3 - x_7) + x_7 = 2,$$

azaz $2 = 2$, tehát azonosság.

Hány megoldása lehet egy lineáris egyenletrendszernek?

1. eset

Ha a Gauss-elimináció során ellentmondó sort találunk akkor **nincsen megoldás**.

Ha nem kapunk ellentmondó sort a Gauss-elimináció során, akkor van megoldás. Ha van megoldás, akkor azt kell vizsgálni, hogy van-e szabad változó.

2. eset

Ha van megoldás, de nincs szabad változó, az akkor fordul elő, ha a bővített mátrix lépcsős alakjában pont annyi nem-0 sor van, mint ahány változó szerepel az egyenletrendszerben. Ugyanis ekkor a lépcsős alak minden sora egy-egy változót „köt le”. Azaz, ha nincs szabad változó, akkor a kötött változók értéke egy-egy szám, így **pontosan egy megoldás** van.

3. eset

Ha van megoldás (azaz nincsen ellentmondó sor a Gauss-elimináció során), és van szabad változó, akkor **végtelen sok megoldás** van, hiszen a szabad változók tetszőleges valós számot felvehetnek értéként.

Összefoglaló

Egy lineáris egyenletrendszer esetén

- vagy nincs megoldás,
- vagy pontosan egy megoldás van,
- vagy végtelen sok megoldás van, és ilyenkor van szabad változó is, amelynek tetszőleges valós szám értéként adható.

1. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 3x_2 + (a - 4)x_3 &= 4 \\ x_1 + (a^2 - a - 1)x_3 &= a - 4\end{aligned}$$

2. Gondolkodnivaló

Igazak-e a következő állítások? (Ha igen, bizonyítsuk, ha nem, adjunk rá ellenpéldát.)

- Ha egy lineáris egyenletrendszerben annyi egyenlet szerepel, mint ahány változó, akkor mindig van megoldás.
- Ha egy lineáris egyenletrendszer kevesebb egyenletet tartalmaz, mint a változók száma, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
- Ha egy lineáris egyenletrendszerben több egyenlet szerepel, mint a változók száma, akkor végtelen sok megoldása van.

3. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg a következő n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \end{array}$$