

2. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 1. – 20. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P , illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1 -es mátrix, mely az A mátrix i . sorának j . elemét tartalmazza.

1. Vizsgáljuk, hogy mekkora legyen a P és a Q mátrix mérete.

Ahhoz, hogy a PAQ szorzat létezzen (az A mátrix $n \times k$ méretű) a P -nek n oszlopból kell állnia, a Q -nak pedig k sorból, továbbá a PAQ szorzat 1×1 -es mátrix:

P mátrix $1 \times n$ -es, a Q mátrix $k \times 1$ -es.

2. Meghatározzuk a $P_{1 \times n}$ mátrixot.

A feladat szerint $(PAQ)_{1 \times 1} = (a_{ij})$ -nek kell teljesülnie, ehhez $(PA)_{1 \times k}$ mátrixnak az A mátrix i . sorát kell megadnia:

$$PA = P \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}).$$

Tehát $P = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)_{1 \times n}$, ahol az 1 az i . helyen szerepel.

3. Meghatározzuk a $Q_{k \times 1}$ mátrixot.

A $(PA)_{1 \times k}$ mátrix j . elemét kell megkapnunk a $Q_{k \times 1}$ -val való szorzással, így:

$$(PA)Q = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}) \cdot Q = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

ahol a Q mátrixban az 1 a j . helyen szerepel.

2. Gondolkodnivaló

Legyen A $n \times m$ -es, B pedig $k \times l$ -es mátrix. Mi a feltétele (természetesen n, m, k és l vonatkozásában) annak, hogy

- 1 AB létezzen, de BA nem;
- 2 AB létezzen, BA is, de ne legyenek azonos méretűek;
- 3 AB létezzen, BA is, és legyenek azonos méretűek.

Legyen A $n \times m$ -es, B pedig $k \times l$ -es mátrix.

- ① *AB létezzen, de BA nem:* AB pontosan akkor létezik, ha $m = k$, BA pedig pontosan akkor nem létezik, ha $l \neq n$.
- ② *AB létezzen, BA is, de ne legyenek azonos méretűek:* AB pontosan akkor létezik, ha $m = k$, BA pedig akkor, ha $l = n$. Ekkor AB $n \times n$ -es négyzetes mátrix, BA pedig $m \times m$ -es négyzetes mátrix. Különböző méretűek lesznek, ha $n \neq m$.
- ③ *AB létezzen, BA is, és legyenek azonos méretűek:* felhasználva az előző részt: $n = m = k = l$.

3. Gondolkodnivaló

Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}.$$

Vizsgáljuk meg kis n -ek estén a hatványozás eredményét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez alapján megfogalmazhatjuk a következő sejtést:

Sejtés

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}.$$

A sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk. Az előbb láttuk, hogy $n = 2, 3$ -ra teljesül. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, és bizonyítsuk $k + 1$ -re.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát a sejtést igazoltuk.

Determinánsok

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert, ahol a, b, c, d, e, f valós paraméterek. Határozzuk meg x_2 -t.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= e \\ cx_1 + dx_2 &= f \end{aligned}$$

Ha az első egyenletet megszorozzuk c -vel, a másodikat pedig a -val, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} acx_1 + bcx_2 &= ce \\ acx_1 + adx_2 &= af \end{aligned}$$

A második egyenletből az első kivonva kapjuk:

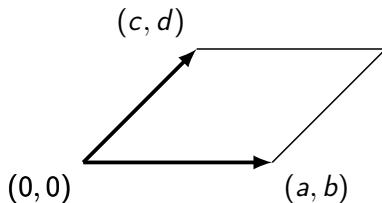
$$x_2(ad - bc) = af - ce,$$

azaz, ha $ad - bc \neq 0$, akkor $x_2 = \frac{af - ce}{ad - bc}$.

Észrevehető, hogy a fenti megoldás nevezője csak az egyenletrendszer bal oldalán szereplő együtthatóktól függ, vagyis csak az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrixtól.



Paralelogramma területe

Tekintsünk a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektortokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.

Ugyanaz az érték szerepel a paralellogramma területének kiszámításakor, mint a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásakor. Mivel ez az érték a matematika sok más területén is előfordul, és nagyon fontos szerepet játszik, ezért külön neve is van: *determináns*.

2×2 -es mátrix determinánsa

Az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

Létezés

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánása. Adott A négyzetes mátrix determinánása valós szám. Ennek a számnak a jele: $|A|$.

Kiszámítás – Rekurzív

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $n \times n$ -es mátrix determinánsához n db $(n - 1) \times (n - 1)$ -es mátrix determinánsát kell kiszámolni. Szükségünk van néhány fogalomra.

Definíció

Legyen A $n \times n$ -es determináns. Ekkor az A i . sorának j . eleméhez tartozó *aldetermináns* úgy keletkezik, hogy A -ból elhagyjuk az i . sorát, illetve j . oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij} .

Példa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

Definíció

Legyen A $n \times n$ -es determináns. Ekkor az A i . sorának j . eleméhez tartozó *aldetermináns* úgy keletkezik, hogy A -ból elhagyjuk az i . sorát, illetve j . oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij} .

Példa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Definíció

Legyen A $n \times n$ -es determináns. Ekkor az A i . sorának j . *elemének adjungáltja* úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a megfelelő előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Példa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

Definíció

Legyen A $n \times n$ -es determináns. Ekkor az A i . sorának j . *elemének adjungáltja* úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a megfelelő előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Példa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

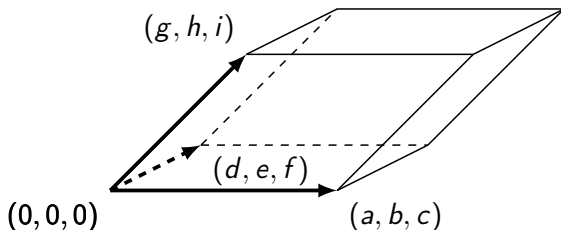
Rekurzív definíció

Legyen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ ahol } n > 1.$$

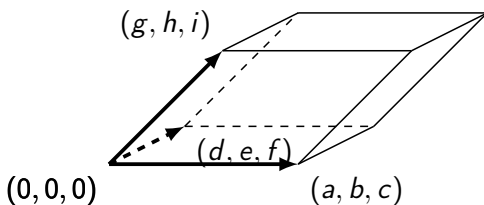
Ekkor az A determináns első sora szerinti kifejtése:

$$A = \sum_{j=1}^n (a_{1j} A_{1j}) = \sum_{j=1}^n (a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot M_{1j}).$$



Paralelepipedon térfogata

A paralelogramma területét a síkon egy 2×2 mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg. A térben az (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát egy 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg.



A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végpontjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \\ + c \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|.$$

A determináns rekurzív definíciója alapján az $n \times n$ -es determináns $n!$ sok szorzat összegeként számítható ki.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Kifejtés

Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető.

A determinánst az i -edik sor szerint kifejtve:

$$A = \sum_{j=1}^n (a_{ij} A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}),$$

illetve egy sor helyett egy oszlop elemein is végighaladhatunk, pl. a j . oszlop szerint:

$$A = \sum_{i=1}^n (a_{ij} A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}).$$

Megj.: A két formula csak a szummák futó indexében különbözik.

Transzponálás

A determináns egyenlő a transzponáltjával.

Példa

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dualitási elv

Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az oszlop és sor szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

c-szeres

Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy c valós számmal, akkor a determináns értéke is c -szeresére változik.

Trianguláris mátrix determinánsa

Ha a determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trinaguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.

Sorcsere

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke (-1) -szeresére változik.

Nulla determináns

A determináns nulla, ha

- valamely sorának minden eleme nulla;
- két sora azonos;
- két sora arányos.

Sorok összegzése

Determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c -szeresét hozzáadjuk.

Példa

Ha a lenti determináns 2. sorához hozzáadjuk a 3. sor 2-szeresét, az értéke változatlan marad.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sorok összegzése

Determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c -szeresét hozzáadjuk.

Példa

Ha a lenti determináns 2. sorához hozzáadjuk a 3. sor 2-szeresét, az értéke változatlan marad.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa "kinullázható", vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

Példa

Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát a 3. eleme, az 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa "kinullázható", vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

Példa

Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát a 3. eleme, az 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}$$

Először vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

majd az 1. sorból kivonjuk a 3. sor 2-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst kifejtethetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinánsok szorzástétele

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

A ferde kifejtés tétele

Legyen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ ahol } n > 1.$$

Ha $i \neq j$, akkor

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0,$$

azaz ha determináns egy sorában lévő elemeket egy **másik** sorához tartozó adjungáltakkal szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t kapunk.

Példa

Alkalmazzunk ferde kifejtést az alábbi determinánsra az 1. és 3. sorok szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot 1 \cdot -3 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszer

Cramer-szabály

Ha egy lineáris egyenletrendszer szabályos, akkor egyetlen megoldása van, mégpedig a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Tehát a fenti tétel azt mondja ki, hogy csak egy megoldás létezik, vagyis az $x_1, \dots, x_n$ változóknak csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek: x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i . oszlopot kicseréljük a konstansok oszlopával.

Példa

Ha az alábbi lineáris egyenletrendszer szabályos, oldjuk meg Cramer-szabály segítségével.

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 & = & -1 \end{array}$$

Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13$$

Példa

Ha az alábbi lineáris egyenletrendszer szabályos, oldjuk meg Cramer-szabály segítségével.

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 & = & -1 \end{array}$$

Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

így szabályos az egyenletrendszer.

Mivel szabályos a lineáris egyenletrendszer, alkalmazható a Cramer-szabály, egyetlen megoldás létezik:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-10}{13},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{7}{13},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{1}{13}.$$

A lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = \frac{-10}{13}, \quad x_2 = \frac{7}{13}, \quad x_3 = \frac{1}{13}.$$

FONTOS!!!

A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszernek nem ugyanannyi egyenlete van, mint változója.

A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az előző feltétel teljesül, azonban az együtthatómátrix determinánsa 0.

1. Gondolkodnivaló

Determinánseleméleti tételek segítségével határozzuk meg a következő $n \times n$ -es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \\ n & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Gondolkodnivaló

Determinánselméleti tételek segítségével határozzuk meg a következő $n \times n$ -es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$