

Lineáris algebra (10A103)

Kátai-Urbán Kamilla

Tudnivalók

- Honlap: <http://www.math.u-szeged.hu/~katai>
- Jegyzet: Megyesi László: Lineáris algebra.
- Vizsga: írásbeli (beugróval), feltétele a Lineáris algebra gyakorlat teljesítése.

1. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 42. – 46. oldal.

Mátrixok, mátrixműveletek

- $n \times m$ -es mátrix: táblázat n sorral és m oszloppal.
- KEREK zárójelek között.
- Elemei VALÓS számok.

Példa

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0.5 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

Jelölés

- A *mátrixokat* általában az ABC elejéről vett nagybetűkkel jelöljük ($A, B, C \dots$).
 $A \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$: 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- A *mátrix eleme*: a B mátrix i . sorának j . elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet $(B)_{ij}$ -vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

Sütöde "termelési" és "árfolyam" mátrixa

	liszt	víz	só	energia
kenyér	0.8	0.3	1.1	2.4
kifli	0.3	0.1	0.4	1.1
zsömle	0.5	0.2	0.6	1.9

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt	15	13	12
víz	10	11	14
só	23	12	17
energia	9	11	13

Mennyibe került 1 kenyér előállítása dec. 1-én?

	liszt	víz	só	energia
kenyér	0.8	0.3	1.1	2.4
kifli	0.3	0.1	0.4	1.1
zsömle	0.5	0.2	0.6	1.9

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt	15	13	12
víz	10	11	14
só	23	12	17
energia	9	11	13

Egy kenyér előállítása

$$0.8 \cdot 15 + 0.3 \cdot 10 + 1.1 \cdot 23 + 2.4 \cdot 9 = 61.9$$

Ft-ba került.

Hasonlóképpen kiszámítható a következő táblázat minden eleme.

	liszt	víz	só	energia
kenyér	0.8	0.3	1.1	2.4
kifli	0.3	0.1	0.4	1.1
zsömle	0.5	0.2	0.6	1.9

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
liszt	15	13	12
víz	10	11	14
só	23	12	17
energia	9	11	13

	dec. 1.	dec. 2.	dec. 3.
kenyér	61.9	53.3	63.7
kifli	24.6	21.9	26.1
zsömle	40.4	36.8	43.7

Létezés

Ha A $n \times m$ -es, B pedig $m \times k$ -as mátrix, akkor létezik a szorzatuk, $A \cdot B$, amely $n \times k$ -as mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

Kiszámítás

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i . sorának j . elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i . sorának elemeit B j . oszlopának megfelelő elemeivel (a szorzótényezők mérete miatt mindkettőnek ugyanannyi, m db eleme van), majd az így kapott számokat összeadjuk.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4$$

$$c_{12} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4$$

$$c_{12} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5$$

Mátrixszorzás definíciója

Legyen A $n \times m$ -es, B pedig $m \times k$ -as mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $n \times k$ -as és i . sorának j . eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{t=1}^m a_{it} \cdot b_{tj}.$$

Létezés

Ha A $n \times m$ -es és B is $n \times m$ -es mátrix, akkor összeadhatók, és az összegük is $n \times m$ -es lesz, azaz csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

Kiszámítás

Az összegmátrix i . sorának j . eleme A i . sora j . elemének és B i . sora j . elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 + 2 \quad c_{12} = (-2) + (-1)$$

$$c_{21} = 3 + 0 \quad c_{22} = 4 + 1$$

$$c_{31} = 2 + 2 \quad c_{32} = 1 + 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 + 2 \quad c_{12} = (-2) + (-1)$$

$$c_{21} = 3 + 0 \quad c_{22} = 4 + 1$$

$$c_{31} = 2 + 2 \quad c_{32} = 1 + 4$$

Mátrix szorzása skalárral

Skalár=szám...

Létezés

Mindig létezik.

Kiszámítás

Mátrixot úgy szorzunk λ skalárral, hogy minden elemét megszorozzuk λ -val.

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Létezés

Mátrix tranzponáltja mindig létezik. Egy $n \times m$ -es mátrix tranzponáltja $m \times n$ -es.

Kiszámítás

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Az összeadás kommutatív:

$$A + B = B + A.$$

Valamint asszociatív:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Mit értünk a fentiek alatt?

Azt, hogy valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

A szorzás asszociatív:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

A szorzás disztributív az összeadásra nézve, mindkét oldalról:

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A. \end{aligned}$$

A SZORZÁS NEM KOMMUTATÍV!!!

1. eset

Előfordulhat, hogy $A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ NEM LÉTEZIK}$$

A SZORZÁS NEM KOMMUTATÍV!!!

2. eset

Előfordulhat, hogy $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

A SZORZÁS NEM KOMMUTATÍV!!!

3. eset

Ha $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, és ráadásul egyforma méretűek, akkor sem biztos, hogy egyenlők.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tetszőleges A, B $n \times n$ -es mátrixokra:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B) \cdot (A + B) = (A + B) \cdot A + (A + B) \cdot B = \\ &= A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2.\end{aligned}$$

De a szorzás nem kommutatív, így

$$A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2.$$

Hatványozás azonosságai

A szorzás asszociativitása miatt a következők érvényesek tetszőleges $A \ n \times n$ -es mátrixokra:

$$\begin{aligned} A^n \cdot A^m &= A^{n+m}, \\ (A^n)^m &= A^{nm}. \end{aligned}$$

Transzponálás azonosságai

Tetszőleges $A \ n \times k$ -as és $B \ k \times m$ -es mátrixra érvényesek:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T. \end{aligned}$$

Definíció

Egy mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a transzponáltjával.

$$A^T = A.$$

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $n \times n$ -es.

Definíció

Egy $n \times n$ -es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa – Felső trianguláris mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definíció

Egy $n \times n$ -es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa – Alsó trianguláris mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Definíció

Egy $n \times n$ -es mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha csak a főátlójában lehetnek 0-tól különböző elemek.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definíció

Egy $n \times n$ -es mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha csak a főátlójában lehetnek 0-tól különböző elemek.

Példa2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definíció

Az $n \times n$ -es egységmátrix az a mátrix, amelynek főátlójában végig 1-esek, mindenhol máshol 0-k vannak. Jele: E_n .

Példa

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az egységmátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 a valós számok szorzására nézve: bármely A $n \times n$ -es mátrix esetén

$$E_n A = A E_n = A.$$

Definíció

Az $n \times n$ -es zérómátrix az a mátrix, amely csak 0-kat tartalmaz.

Jele: Z_n .

Példa

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 a valós számok szorzására nézve: bármely A $n \times n$ -es mátrix esetén

$$Z_n A = A Z_n = Z_n.$$

Egy mátrix felfogható úgy is, mintha több kisebb mátrixból állna, azaz a mátrixok blokkokra bonthatók.

Példa

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Az előző mátrix négy blokkja négy kisebb mátrix:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Az előző mátrix így is írható a kis mátrixok segítségével:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Blokkokra bontott mátrixokat is a szokásos módon szorzunk össze.
Ha A és B a következőképpen bomlanak blokkokra:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

akkor a szorzatuk:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}.$$

Természetesen ekkor az eredményt is blokkokra bontott alakban kapjuk.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}.$$

Mivel $A_{11}, B_{11}, A_{12}, B_{12}, \dots$ nem valós számok, hanem mátrixok, így nem mindig szorozhatók össze. Azaz nem mindegy, hogy A és B felbontásában a blokkokat milyen méretűre választjuk. Rossz felbontás esetén előfordulhat, hogy a két mátrixot nem lehet blokkosan összeszorozni.

Szorozzuk össze a mátrixokat blokkosan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Jelöljük a mátrixok blokkjait:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Ekkor a szorzat:

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & \\ \hline 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 4 & 1 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 12 & -1 & \\ \hline 0 & 14 & 1 & \\ \hline 10 & 0 & 5 & \end{array} \right). \end{aligned}$$

1. Gondolkodnivaló

Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P , illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1 -es mátrix, mely az A mátrix i . sorának j . elemét tartalmazza.

2. Gondolkodnivaló

Legyen A $n \times m$ -es, B pedig $k \times l$ -es mátrix. Mi a feltétele (természetesen n, m, k és l vonatkozásában) annak, hogy

- ❶ AB létezzen, de BA nem;
- ❷ AB létezzen, BA is, de ne legyenek azonos méretűek;
- ❸ AB létezzen, BA is, és legyenek azonos méretűek.

3. Gondolkodnivaló

Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}.$$