

13. Előadás

Mintavizsga:

<http://www.math.u-szeged.hu/~katai/linalkg14/mintavizsga.pdf>

Az 1. és 2. feladatból összesen legalább 25 pontot el kell érni, különben a vizsga elégtelen.

1. Feladat. (10×2 pont) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Helyes válasz 2 pont, hibás válasz -1 pont, ha nincs válasz, 0 pont.

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $AB = BA$.	
Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke nem változik.	
Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor.	
Bármely V vektortér és $v_1, v_2, v_3 \in V$ esetén $v_1 + 2v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$.	
Ha a Leontyev-inverz tartalmaz pozitív számot, akkor a gazdaság működőképes.	
Ha egy vektor koordinátasora egy bázisban $(1, 2, -1)$, akkor a bázis bármely vektorával kicserélhető.	
Az $(1, -1, 2), (-2, 2, -4)$ vektorrendszer rangja 2.	
Azonos méretű invertálható mátrixok szorzata is invertálható.	
Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorjai: $-1, -2, -3$, akkor a kvadratikus alak negatív definit.	
Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a 2.	

Az 1. Feladatban csak azt kell eldönteni, hogy igaz vagy hamis az állítás, de most indokoljuk is a válaszokat.

1.1. Feladat. Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $AB = BA$.

Az állítás hamis. Egy ellenpélda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.2. Feladat. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke nem változik.

Az állítás hamis, ugyanis a következő determinánselméleti tétel szerepelt:

Sorcsere

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke (-1) -szeresére változik.

1.3. Feladat. Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor.

Az állítás igaz. Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása az ekvivalens azzal, hogy a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor, ahogy ezt az alábbi tételben is megfogalmaztuk.

Tétel

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában szerepel ellentmondó sor, azaz a következő:

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$.

1.4. Feladat. Bármely V vektortér és $v_1, v_2, v_3 \in V$ esetén $v_1 + 2v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$.

Az állítás hamis. Például, ha $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (2, -4)$ és $v_3 = (0, -3)$. Mivel a v_1, v_2 vektorok egy egyenesbe esnek az állítás nem teljesül, ugyanis

$$v_1 + 2v_2 - v_3 = (5, -7) \notin [(1, -2), (2, -4)].$$

1.5. Feladat. Ha a Leontyev-inverz tartalmaz pozitív számot, akkor a gazdaság működőképes.

Az állítás hamis. Ugyanis a gazdaság pontosan akkor működőképes, ha a Leontyev-inverz nem tartalmaz negatív számot, tehát az nem elég, hogy van benne pozitív szám.

1.6. Feladat. Ha egy vektor koordinátasora egy bázisban $(1, 2, -1)$, akkor a bázis bármely vektorával kicserélhető.

Az állítás igaz, ugyanis a következő tétel teljesül:

Tétel

Ha $v_1, \dots, v_n$ egy bázisa V -nek és $v \in V$, akkor a

$$v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n$$

vektorrendszer pontosan akkor bázisa V -nek, ha a v vektor v_i -re vonatkozó koordinátája nem 0.

1.7. Feladat. Az $(1, -1, 2), (-2, 2, -4)$ vektorrendszer rangja 2.

Az állítás hamis. Mivel a két vektor lineárisan függő vektorrendszert alkot: $(-2, 2, -4) = (-2) \cdot (1, -1, 2)$ a vektorrendszer rangja 1.

1.8. Feladat. Azonos méretű invertálható mátrixok szorzata is invertálható.

Az állítás igaz. Egy mátrix pontosan akkor invertálható (azaz létezik az inverze), ha a determinánsa nem 0. Legyen A és B $n \times n$ -es nem 0 determinánsú mátrixok, ekkor a determinánsok szorzástételét felhasználva kapjuk:

$$|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0,$$

így AB , is invertálható.

1.9. Feladat. Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorjai: $-1, -2, -3$, akkor a kvadratikus alak negatív definit.

Az állítás hamis. A negatív definit kvadratikus alakok a főminorokkal a következőképpen jellemezhetők:

Tétel

Egy q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha mátrixának főminori váltakozó előjelűek: az 1×1 -es negatív, a 2×2 -es pozitív, a 3×3 -as negatív, stb.

1.10. Feladat. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a 2.

Akkor lesz a 2 az A mátrix sajátértéke, ha az $A - 2E$ mátrix determinánsa 0.

$$|A - 2E| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

tehát az állítás hamis.

1. Feladat. (10×2 pont) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Helyes válasz 2 pont, hibás válasz -1 pont, ha nincs válasz, 0 pont.

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $AB = BA$.	h
Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke nem változik.	h
Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor.	i
Bármely V vektortér és $v_1, v_2, v_3 \in V$ esetén $v_1 + 2v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$.	h
Ha a Leontyev-inverz tartalmaz pozitív számot, akkor a gazdaság működőképes.	h
Ha egy vektor koordinátasora egy bázisban $(1, 2, -1)$, akkor a bázis bármely vektorával kicserélhető.	i
Az $(1, -1, 2), (-2, 2, -4)$ vektorrendszer rangja 2.	h
Azonos méretű invertálható mátrixok szorzata is invertálható.	i
Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorjai: $-1, -2, -3$, akkor a kvadratikus alak negatív definit.	h
Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a 2.	h

2. Feladat. (6×5 pont) A táblázatba csak a végeredményeket írja be.
A részfeladatokra 0 vagy 5 pont kapható.

Határozza meg az	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	determináns értékét.	
Határozza meg az	$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$	lineáris egyenlet-rendszer általános megoldását.	
Adja meg az $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 2)$, $(1, -2, -2)$ bázisban a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátáit.			
Számítsa ki a	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	mátrix rangját, valamint adja meg egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát.	
Az	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	mátrix egy sajátértéke a 2. Adja meg a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.	
Határozza meg az $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ kvadratikus alak osztályát (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit).			

2.1. Feladat. Határozza meg az $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ determináns értékét.

Az első oszlopot az első elemével kinullázunk, majd az első oszlopa szerint kifejtjük a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-5 - 10) = -15.$$

2.2. **Feladat.** Határozza meg az

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

Gauss-eliminációval oldjuk meg (természetesen lehetne elemi bázistranszformáció segítségével is):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A lépcsős mátrix második sorából: $x_2 = 1 - 2x_3$, az első sorból: $x_1 = x_2 - x_3 + 1 = (1 - 2x_3) - x_3 + 1 = 2 - 3x_3$. Tehát az általános megoldás: szabad változó az x_3 , kötött változók az x_1 és az x_2 , melyekre:

$$x_1 = 2 - 3x_3, \quad x_2 = 1 - 2x_3.$$

Ellenőrzés: Az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve azonosságot kell kapni.

2.3. Feladat. Adja meg az $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 2)$, $(1, -2, -2)$ bázisban a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátáit.

A koordináták meghatározásához meg kell adni a következő lineáris kombináció esetén az együtthatók értékét:

$$x_1(1, 0, 1) + x_2(-1, 1, 2) + x_3(1, -2, -2) = (1, -1, 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{array}$$

Tehát a v vektor koordinátái ebben a bázisban: $(1, 1, 1)$.

Ellenőrzés: $1(1, 0, 1) + 1(-1, 1, 2) + 1(1, -2, -2) = (1, -1, 1)$.

2.4. Feladat. Számítsa ki a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját, valamint adja meg egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát.

A rangot elemi bázistranszformációval határozzuk meg:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1^* & -1 & 2 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ e_3 & -1 & 1 & 8 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & -1 & 2 & 1 \\ e_2 & 0 & 5^* & 3 \\ e_3 & 0 & 10 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & v_2 & v_4 \\ \hline v_1 & -1 & -\frac{1}{5} \\ v_3 & 0 & \frac{3}{5} \\ e_3 & 0 & -2^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} & v_2 \\ \hline v_1 & -1 \\ v_3 & 0 \\ v_4 & 0 \end{array}$$

Tehát a rang 3.

Az előző táblázat segítségével egy nemeltűnő aldetermináns is megadható. Az 1., 2. és 3. sor (e_1 , e_2 , e_3 került ki a bázisból), illetve az 1., 3. és 4. oszlop (v_1 , v_3 , v_4 került be a bázisba) által meghatározott:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.5. Feladat. Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a 2.

Adja meg a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.

Ehhez az $(A - 2E)\underline{x}^T = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális rendszerét kell megadni.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mivel az egyenletek egymás számszorosai, elég az egyiket tekinteni, a megoldás: x_2, x_3 szabad ismeretlenek, és $x_1 = -x_2 + 2x_3$.

A sajátaltér egy bázisa: $(-1, 1, 0), (2, 0, 1)$.

Ellenőrzés: (az egyik bázis vektorra)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.6. Feladat. Határozza meg az $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ kvadratikus alak osztályát (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit).

A kvadratikus alak mátrixát diagonális alakra hozzuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így a kanonikus alak $y_1^2 + y_2^2$, tehát a kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

2. Feladat. (6×5 pont) A táblázatba csak a végeredményeket írja be.

Határozza meg az	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	determináns értékét.	-15
Határozza meg az	$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$	lineáris egyenlet-rendszer általános megoldását.	x_3 szabad v. $x_1 = 2 - 3x_3$ $x_2 = 1 - 2x_3$
Adja meg az $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 2)$, $(1, -2, -2)$ bázisban a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátáit.			$(1, 1, 1)$
Számítsa ki a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját, valamint adja meg egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát.			3, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$
Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a 2. Adja meg a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.			$(-1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$
Határozza meg az $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ kvadratikus alak osztályát (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit).			pozitív szemidefinit

3. Feladat. (5×6 pont) Definiálja az alábbi fogalmakat, illetve mondja ki a tételeket.

Determinánsok szorzástétele:

Definiálja a vektorrendszer lineáris függetlenségét, valamint mondjon ki két tételt, ami lineárisan függő vektorrendszerre vonatkozik:

Vektortér bázisa, alterek dimenziótétele:

Oszloprang, sorrang, mátrix rangja, rangszámtétel:

Negatív definit kvadratikus alak (értékkészlet szerinti osztályozással):

3.1. Feladat. Determinánsok szorzástétele:

Tétel

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

3.2. Feladat. Definiálja a vektorrendszer lineáris függetlenségét, valamint mondjon ki két tételt, ami lineárisan függő vektorrendszerre vonatkozik:

Definíció

Legyen V valós vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \underline{0}$ -ból következik, hogy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, azaz a vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\underline{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Tétel

Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.

Tétel

Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

3.3. Feladat. Vektortér bázisa, alterek dimenziótétele:

Definíció

Vektortér *bázisának* nevezzük a vektortér lineárisan független generátorrendszerét.

Alterek dimenziótétele

Legyen U_1, U_2 két altere V -nek. Ekkor

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

3.4. Feladat. Oszloprang, sorrang, mátrix rangja, rangszámtétel:

Definíció

A mátrix *sorrangjának* nevezzük a mátrix sorvektorrendszerének rangját. Oszlopvektorrendszerének rangját a mátrix *oszloprangjának* nevezzük. *Mátrix rangjának* nevezzük a legnagyobb nem-0 aldeterminánsának a méretét.

Rangszámtétel

Bármely mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik a rangjával.

3.5. Feladat. Negatív definit kvadratikus alak (értékkészlet szerinti osztályozással):

Definíció

Egy n változós q kvadratikus alakot *negatív definitnek* nevezünk, ha bármely $x_1, \dots, x_n$ esetén $q(x_1, \dots, x_n) \leq 0$, és $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ csak akkor, ha $x_1 = \dots = x_n = 0$

4. Feladat. (10 pont) Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P , illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1 -es mátrix, mely az A mátrix i . sorának j . elemét tartalmazza.

1. Vizsgáljuk, hogy mekkora legyen a P és a Q mátrix mérete.

Ahhoz, hogy a PAQ szorzat létezzen (az A mátrix $n \times k$ méretű) a P -nek n oszlopból kell állnia, a Q -nak pedig k sorból, továbbá a PAQ szorzat 1×1 -es mátrix:

P mátrix $1 \times n$ -es, a Q mátrix $k \times 1$ -es.

2. Meghatározzuk a $P_{1 \times n}$ mátrixot.

A feladat szerint $(PAQ)_{1 \times 1} = (a_{ij})$ -nek kell teljesülnie, ehhez $(PA)_{1 \times k}$ mátrixnak az A mátrix i . sorát kell megadnia:

$$PA = P \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}).$$

Tehát $P = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)_{1 \times n}$, ahol az 1 az i . helyen szerepel.

3. Meghatározzuk a $Q_{k \times 1}$ mátrixot.

A $(PA)_{1 \times k}$ mátrix j . elemét kell megkapnunk a $Q_{k \times 1}$ -val való szorzással, így:

$$(PA)Q = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}) \cdot Q = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

ahol a Q mátrixban az 1 a j . helyen szerepel.

5. Feladat. (10 pont) Előfordulhat-e elemi bázistranszformáció során, hogy a táblázat bizonyos számok nem változnak? Ha igen, akkor mely elemekkel fordulhat elő, és milyen esetekben?

A következő esetben nem változik az elem:

- 1 Ha a generáló elem 1, vagy -1 , akkor nem változik a generáló elem helyére írt elem, hiszen a reciprokát vesszük.
- 2 Ha a generáló elem 1, akkor a sorában lévő többi elem változatlan, mert 1-gyel osztottuk.
- 3 ha a generáló elem -1 , akkor az oszlopában lévő többi elem változatlan, mert $(-1)(-1)$ -gyel osztottuk.
- 4 Ha a generáló elem sorában van 0, akkor a 0 elem teljes oszlopa változatlan, mert 0-t vontunk ki belőle.
- 5 Ha a generáló elem oszlopában van 0, akkor a 0 elem teljes sora változatlan marad, mert 0-t vontunk ki belőle.