

12. Előadás

1. Gondolkodnivaló

Vegyük észre, hogy egy q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha $-q$ pozitív definit. Ezt felhasználva adjuk meg a negatív definit kvadratikus alakok jellemzését a mátrixuk főminorai segítségével.

A kvadratikus alakok értékkészlet szerinti jellemzése alapján: egy q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha minden $\underline{0}$ vektortól különböző vektorra NEGATÍV értéket ad (természetesen $\underline{0}$ -ra minden kvadratikus alak 0 értéket ad). Világos, hogy ekkor $-q$ pozitív definit lesz.

Hogy néz ki a q (negatív definit) kvadratikus alak mátrixa? Éppen (-1) -szerese $-q$ mátrixának. Márpedig $-q$ pozitív definit, így mátrixának minden főminora pozitív.

Tehát a következő: ha egy A mátrix minden főminorára pozitív, akkor mit tudunk mondani a $-A$ mátrix főminorairól?

Világos, hogy $-A$ k . főminora éppen A k . főminorának $(-1)^k$ -szorososa, hiszen a megfelelő $k \times k$ -as mátrix éppen a másik mátrix -1 -szerese. Márpedig ha B egy $k \times k$ -as mátrix, akkor

$$|-B| = (-1)^k |B|,$$

hiszen ha a determinánst szorzom -1 -gyel, akkor csak 1 sorát szorozzuk -1 -gyel, azaz minden sorból ki tudjuk emelni a -1 -et.

Ezen gondolkodnivaló állítását érdemes tételbe foglalni, mivel elég fontos:

Tétel

Egy q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha mátrixának főminorai váltakozó előjelűek: az 1×1 -es negatív, a 2×2 -es pozitív, a 3×3 -as negatív, stb.

Fontos odafigyelni, hogy melyik főminorral kezdődik a sorozat, például a $3, -4, 4, -3$ sorozat nem egy negatív definit kvadratikus alak főminor-sorozata, hiszen pozitív számmal kezdődik (természetesen a főminorokat úgy írjuk le, hogy az első mindig az 1×1 -es).

2. Gondolkodnivaló

Egy duopólium két tagjának kifizetéseit (nyereségét) mutatja az alábbi táblázat. A vállalatoknak két stratégiája van, kicsi vagy nagy kibocsátást választhatnak.

		2. vállalat	
		kicsi	nagy
1. vállalat	kicsi	130, 130	80, 140
	nagy	140, 80	50, 50

Milyen stratégiát válasszanak, ha

- (a) egyszerre lépnek a vállalatok;
- (b) először az 1. vállalat lép, azután a 2. vállalat;
- (c) először az 1. vállalat, majd a 2. vállalat, végül megint az 1. vállalat lép.

		2. vállalat	
		kicsi	nagy
1. vállalat	kicsi	130, 130	80, 140
	nagy	140, 80	50, 50

(a) egyszerre lépnek a vállalatok;

Nash-egyensúlyt kell keresni, azaz olyan helyzetet, ahonnan egyik vállalatnak sem éri meg egyoldalúan kimozdulni. Ez a kicsi-nagy, illetve nagy-kicsi stratégia pár.

(b) először az 1. vállalat lép, azután a 2. vállalat;

Az 1. vállalat nagy kibocsátást választ, a 2. pedig kicsi kibocsátást.

		2. vállalat	
		kicsi	nagy
1. vállalat	kicsi	130, 130	80, 140
	nagy	140, 80	50, 50

(c) először az 1. vállalat, majd a 2. vállalat, végül megint az 1. vállalat lép.

Úgy tűnik, hogy az 1. játékos előnyben van, azonban nem ez a helyzet. A 2. vállalat nem törődik azzal, hogy az 1. vállalat milyen stratégiát választ, és a 2. vállalat nagy kibocsátás mellett dönt. Erre válaszul az 1. vállalat kicsi kibocsátást választ. Így nem az van előnyben, aki először lép, hanem az van hátrányban, aki utoljára lép.

Bevezetés a lineáris programozásba

A gyakorlatban felmerülő konkrét problémák általában nem egyszerű lineáris egyenletrendszerekre vezetnek, hanem legtöbbször speciális feltételek is adottak: egyenletek helyett például egyenlőtlenségek szerepelhetnek, a változók általában nem negatívak. Ráadásul legtöbbször nem az összes megoldást keressük, hanem egy bizonyos szempontból optimális megoldást. Az ilyen problémák megoldásával foglalkozik a lineáris programozás.

Példa

Egy gyárban 3 féle terméket gyártanak: széket (S), asztalt (A), ajtót (J), melyekhez 2 féle nyersanyag szükséges: faforgács (F) és ragasztó (R). Az egyes termékekhez szükséges nyersanyagmennyiségeket az alábbi mátrix tartalmazza:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} F & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ A \\ J \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

A cégnek a székeken 10 Ft, az asztalokon 4 Ft, az ajtókon pedig 3 Ft nyeresége van, míg a raktáraiban 100 egységnyi faforgácsa és 50 egységnyi ragasztója van.

Melyik termékből mennyit állítson elő, hogy a profit maximális legyen?

A probléma az alábbi feladatra vezet: keressük azon (x_1, x_2, x_3) valós számokat (most tekintsünk el attól, hogy egészeket keresünk, hiszen az x_i -k a termékek darabszámát jelölik), amelyekre:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ezen (x_1, x_2, x_3) megoldások közül szeretnénk meghatározni egy olyat, amelyre a

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

érték maximális.

Alapfeladat

A lineáris programozás az alábbi alakú problémákkal foglalkozik:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + b_{11}y_1 + \dots + & \leq (\geq) & c_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ x_1 & \leq (\geq) & d_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ \hline d_{11}x_1 + \dots + e_{11}y_1 + & \rightarrow & \min(\max) \end{array}$$

Azaz lineáris egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepelnek, valamint némely változókra ($x_1, \dots$) vonatkoznak alsó illetve felső korlátok, más változókra ($y_1, \dots$) nincs semmilyen korlát. Ezen kívül adott egy függvény (az úgynevezett célfüggvény), és olyan megoldást keresünk, amelyre az adott függvény minimális (maximális) értéket vesz fel.

A probléma megoldásához először átalakítjuk a feltételeket, a következőképpen:

- A jobboldali konstansok legyenek nemnegatívak.
- A többváltozós egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeljenek.
- MINDEN x változóra egy feltétel vonatkozzon csak: $x \geq 0$.
- A célfüggvényt minimalizálni kelljen (ne maximalizálni).

Az átalakítások legtöbbször természetesen adódnak, nézzünk most néhány példát.

Példa

- Ha egy egyenlőtlenség jobb oldala negatív, szorozzuk meg -1 -gyel:

$$x_1 - 2x_3 + x_3 \geq -3$$

helyett

$$-x_1 + 2x_3 - x_3 \leq 3.$$

- Egyenlőtlenségeket új változók segítségével alakítsunk egyenletté:

- $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3$ helyett

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 3 \\ x_4 & \geq & 0, \end{array}$$

- $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3$ helyett

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

- Korlát nélküli változókat helyettesítsünk két korlátos változóval: y helyett

$$\begin{aligned} y &= x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Ha a célfüggvényt maximalizálni kell, akkor szorozzuk meg -1 -gyel:

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

helyett

$$-10x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min.$$

Ezen átalakítások előbb-utóbb véget érnek, vagyis ha valamit egy átalakítással kijavítunk, azzal nem rontunk el valami mást. Elvégezve a megfelelő átalakításokat, a feladat speciális alakú lesz: úgynevezett standard feladat.

Standard feladat

Az alábbi alakú problémát nevezzük *standard feladatnak*:

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & = & b_1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ x_1, x_2, \dots & \geq & 0 & , \\ \hline c_1x_1 + c_2x_2 + \dots & \rightarrow & \min, & \end{array}$$

ahol $b_1, \dots \geq 0$.

Azaz standard feladat esetén

- MINDEN változóra az a feltétel, hogy nemnegatív,
- a célfüggvényt MINIMALIZÁLJUK,
- az egy változóra vonatkozó $x_i \geq 0$ feltételek kivételével csak egyenletek szerepelnek, NEMNEGATÍV jobboldallal.

Lehetséges kanonikus alakú feladat

Lehetséges kanonikus alakú feladat

Az alábbi alakú standard feladatokat hívjuk *lehetséges kanonikus alakú feladatoknak* (l.k.a.f.):

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{11}y_1 + \dots & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1, \dots, y_1, \dots & \geq & 0 \\ \hline c_1y_1 + \dots & \rightarrow & \min \end{array},$$

ahol $b_1, \dots \geq 0$.

Azaz a l.k.a.f.-ban minden egyenlethez tartozik egy változó, amely csak az adott egyenletben szerepel (még a célfüggvényben sem!), és az adott egyenletben az együtthatója 1, ezek az úgynevezett *kiemelt változók*.

A következő feladat lehetséges kanonikus alakú feladat:

$$\begin{array}{rcl}
 -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
 2x_1 + x_3 + x_4 - 3x_6 & = & 4 \\
 3x_1 - 3x_3 + x_5 - 2x_6 & = & 5 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 \hline
 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

Ugyanis:

$$\begin{array}{rcl}
 x_2 + & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
 x_4 + & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
 x_5 + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 \hline
 & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

kiemelt változók: x_2, x_4, x_5 .

A lehetséges kanonikus alakú feladat egy fontos jellemzője, hogy könnyen leolvasható belőle az egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása.

Bázismegoldás

Bázismegoldásnak nevezzük, ha a kiemelt változók az egyenletek jobboldali konstansai-val egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel.

A ♣ példa esetén:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & + & & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
 & & x_4 & + & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
 & & & x_5 & + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
 \hline
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 & & & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

a bázismegoldás: $x_2 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_1 = x_3 = x_6 = 0$.

Szimplex algoritmus

A módszer lényege, hogy a lehetséges kanonikus alakú feladatokat elemi bázistranszformációk sorozatával oldjuk meg: első lépésként felírjuk a feladat *szimplex tábláját*.

A táblázat sorai az egyenleteknek felelnek meg, a sorok elején most nem a bázis vektorok, hanem a definícióban szereplő kiemelt változók, a célfüggvényt pedig egy külön sorba írjuk.

A ♣ példa:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & + & & -2x_1 - 2x_3 - 2x_6 & = & 3 \\
 & & x_4 & + & 2x_1 + x_3 - 3x_6 & = & 4 \\
 & & & x_5 & + & 3x_1 - 3x_3 - 2x_6 & = & 5 \\
 \hline
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 & & & 2x_1 + 3x_3 + 5x_6 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

Szimplex táblája:

	x_1	x_3	x_6	
x_2	-2	-2	-2	3
x_4	2	1	-3	4
x_5	3	-3	-2	5
	2	3	5	0

A szimplex algoritmus vége

Az algoritmus lényege, hogy a fenti táblázatban megfelelő generáló elemet választva egyre közelebb kerülünk az optimális megoldáshoz.

A szimplex algoritmus vége

Az algoritmus kétféle eredménnyel érhet véget:

- 1 Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható: ekkor a bázismegoldás optimális. A célfüggvény optimumának -1 -szerese a jobb alsó sarokban szereplő szám.
- 2 Ha a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám: ekkor a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

Az első esetre példa a ♣ l.k.a.f.

Példa

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline -x_2 & \rightarrow & \min \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladat esetén a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

Ugyanis a szimplex táblája:

	x_2	
x_1	-1	0
	-1	0

tehát a célfüggvény negatív együtthatójánál nincs pozitív szám, így az előző dián szereplő 2. eset áll fenn.

A generáló elem kiválasztása többféleképpen történhet, a legegyszerűbb algoritmus:

Generáló elem kiválasztása

- Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható, vagy van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor az algoritmus véget ért (ld.: "A szimplex algoritmus vége" dia).
- Ha nem teljesülnek az előző feltételek, akkor van olyan negatív célfüggvény-együttható, melynek oszlopában szerepel pozitív szám:
 - 1 keressük meg ezen célfüggvény-együtthatók közül a legkisebbet,
 - 2 majd az oszlopában válasszuk azt a pozitív együtthatót generáló elemnek, melynek kiválasztása esetén a jobboldali konstansok egyike sem válik negatívvá, ehhez azt az elemet kell választani, ahol a konstans/együttható hányados a legkisebb lesz.

Példa

	x_4	x_5	x_6	x_7		arány
x_1	1	2	1	-1	3	$3/1$
x_2	-1	0	2	2	4	$4/2$
x_3	3	-1	3^*	1	5	$5/3$
	-1	1	<u>-3</u>	2	-2	

A -3 a legkisebb olyan negatív célfüggvény-együttható, amelynek oszlopában szerepel pozitív szám. Az utolsó oszlop tartalmazza a konstans/együttható hányadosokat, ezek közül a 3-hoz tartozó hányados a legkisebb, így azt választjuk generáló elemnek.

Ha a -3 oszlopában más generáló elemet választottunk volna, akkor a konstans oszlopban a következő lépésben megjelenének negatív számok.

Generáló elemet addig kell választanunk, míg az algoritmus véget nem ér (ld.: "A szimplex algoritmus vége" dia).

Megjegyzések

- Az algoritmus hibája, hogy előfordulhat, hogy végtelen ciklusba esik, vagyis folyamatosan választva generáló elemeket, mindig visszatérünk egy korábbi esethez.
- A generáló elem kiválasztásának bonyolításával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen ciklusok elkerülhetők.

Példa

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & & x_3 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 + 2x_4 & = & 8 \\
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & & -2x_3 - x_4 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1^* & 0 & 3 \\ x_2 & 2 & 2 & 8 \\ \hline & -2 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_4 & \\ \hline x_3 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & -2 & 2^* & 2 \\ \hline & 2 & -1 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline x_3 & 1 & 0 & 3 \\ x_4 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & 7 \end{array}$$

Nincs negatív célfüggvény-együttható, ezért a bázismegoldás: $(0, 0, 3, 1)$ optimális, a célfüggvény értéke ezen a helyen: -7 .

Példa

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & & x_3 - x_4 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 - 3x_4 & = & 8 \\
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
 \hline
 & & & -2x_3 - x_4 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1^* & -1 & 3 \\ x_2 & 2 & -3 & 8 \\ \hline & -2 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & \\ \hline x_3 & 1 & -1 & 3 \\ x_2 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & 6 \end{array}$$

Mivel a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, így a célfüggvény alulról nem korlátos, bármilyen kis értéket felvehet.