

11. Előadás

Megyesi László: Lineáris algebra, 98. – 108. oldal.

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg, hogy az x valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi A mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & x \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Ezen x értékek közül, mikor lesz a $(2, 3)$ árvektorral rendelkező termék előállítása minden ágazatban nyereséges?

A gazdaság akkor működőképes, ha a Leontyev-inverz nem tartalmaz negatív értéket. Határozzuk meg az A mátrix Leontyev-inverzét: $(E - A)^{-1}$ -et.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & x \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -x \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

inverzét kell meghatároznunk. Elemi bázistranszformációkat végrehajtva:

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline e_1 & 0.9 & -x \\ e_2 & -0.3^* & 0.6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_2 & a_2 \\ \hline e_1 & 3 & 1.8 - x^* \\ a_1 & -\frac{10}{3} & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_2 & e_1 \\ \hline a_2 & \frac{3}{1.8-x} & \frac{1}{1.8-x} \\ a_1 & \frac{\frac{10}{3}x}{1.8-x} & \frac{2}{1.8-x} \end{array},$$

ahol a második generáló elem választásnál természetesen fel kell tenni, hogy $x \neq 1.8$, különben nincs inverze. Az indexek szerint rendezve megkapjuk a Leontyev-inverzet:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1.8-x} & \frac{\frac{10}{3}x}{1.8-x} \\ \frac{1}{1.8-x} & \frac{3}{1.8-x} \end{pmatrix}.$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1.8-x} & \frac{\frac{10}{3}x}{1.8-x} \\ \frac{1}{1.8-x} & \frac{\frac{3}{1.8-x}}{1.8-x} \end{pmatrix}.$$

A gazdaság akkor működőképes, ha a Leontyev-inverz nem tartalmaz negatív értéket. Ahhoz, hogy az első sor első eleme, és a második sorban szereplő elemek ne legyenek negatívak a nevezők is pozitívnak kell lenni: $1.8 - x > 0 \Rightarrow 1.8 > x$.

Mivel a nevezők pozitívak, így az első sor második elemének számlálójának is nemnegatívnak kell lennie: $\frac{10}{3}x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

Tehát a gazdaság működőképes, ha:

$$0 \leq x < 1.8$$

A feladat másodikrészében az a kérdés, hogy a működőképes gazdaság esetén kapott x értékek közül, mikor lesz a $(2, 3)$ árvektorral rendelkező termék előállítása minden ágazatban nyereséges. Először határozzuk meg a költséget:

$$vA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & x \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 2x + 1.2 \end{pmatrix}.$$

Az első ágazat nyereséges ($1.1 < 2$). A második akkor nyereséges, ha $2x + 1.2 < 3$, tehát $x < 0.9$. Ezt a működőképességre vonatkozó feltétellel összevetve kapjuk:

$$0 \leq x < 0.9$$

2. Gondolkodnivaló

Adjuk meg, hogy az alábbi A mátrixnak mely α értékekre lesz sajátértéke a -5 . Ezen α -ák esetén határozzuk meg a -5 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 1 & \alpha - 5 & -2 \\ -2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}.$$

A -5 pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha az $A - (-5)E$ mátrix determinánsa 0.

$$|A+5E| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & \alpha & -2 \\ -2 & -6 & \alpha + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & \alpha - 3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{vmatrix} = (\alpha - 3)^2 = 0.$$

Tehát a -5 akkor lesz sajátértéke az A -nak, ha $\alpha = 3$.

Az A mátrix ($\alpha = 3$ esetén) -5 sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa az $(A + 5E)\underline{x}^T = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer fundamentális rendszere.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek az együtthatómátrixa, éppen az A mátrix ($\alpha = 3$ esetén).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} x_1 = -3x_2, \\ x_3 = 0. \end{array}$$

Így a sajátalter egy bázisa: $(-3, 1, 0)$.

Kvadratikus alakok

Definíció

Kvadratikus alaknak hívjuk a homogén másodfokú többhatározatlanú polinomokat.

Példa

A következő polinomok:

$$x_1^2, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2, \quad x_1^2 + x_3^2 - x_1x_3$$

kvadratikus alakok, hiszen bennük minden tag pontosan másodfokú, de az

$$x_1^2 - 2x_2, \quad x_1x_2x_3$$

nem kvadratikus alakok.

Bármely kvadratikus alak a következőképpen írható:

$$\underline{x}A\underline{x}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,$$

azonban ha $i \neq j$, akkor a fenti felírásban $a_{ij}x_ix_j$ és $a_{ji}x_jx_i$ is szerepel. Természetes feltenni, hogy $a_{ij} = a_{ji}$, vagyis a_{ij} és a_{ji} éppen az x_ix_j szorzat együtthatójának a fele. Ha ezt a feltevést tesszük, akkor a *kvadratikus alak mátrixa*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrix.

Példa

Az $5x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 - 4x_3^2$ kvadratikus alak mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix},$$

vagyis a mátrix főátlójába kerülnek a négyzetes tagok együtthatói, a többi elem pedig a megfelelő vegyes tag együtthatójának a fele lesz: például az 1. sor 3. eleme éppen az x_1x_3 együtthatójának, a 4-nek a fele 2, de ugyanúgy 2 kerül az 1. oszlop 3. elemébe is.

Az $\underline{x}A\underline{x}^T$ a kvadratikus alakot adja vissza:

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \\ = 5x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 - 4x_3^2. \end{aligned}$$

Definíció

Az olyan kvadratikus alakokat, melyekben nincs vegyes tag, *kanonikus alakú kvadratikus alakoknak* nevezzük.

Példa

Kanonikus alak: $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$ vagy $2x_1^2$.

Egy kvadratikus alak kanonikus alakra hozható a mátrixának felhasználásával is, ha kinullázzuk a kvadratikus alak mátrixának sorait és oszlopait is. Eltérés a Gauss-eliminációhoz képest, hogy itt az oszlopokat és a SOROKAT IS ki kell nullázni, és mindenképpen a mátrix főátlójába eső elemmel.

Megengedett lépés

A kvadratikus alak mátrixán a következő átalakítás végezhető: a mátrix i . sorának c -szeresét hozzáadjuk a mátrix j . sorához, majd ezután a mátrix i . oszlopának c -szeresét hozzáadjuk a mátrix j . oszlopához.

Példa

Hozzuk kanonikus alakra az

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

kvadratikus alakot.

A kvadratikus alak mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Először a főátló első elemével nullázzuk ki az oszlopát, majd a sorát.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

A következő lépésben a főátló második eleme segítségével nullázzuk ki az oszlopát és a sorát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tehát a kvadratikus alak (egyik) kanonikus alakja $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$.

Megjegyzés

A kanonikus alakra hozás során a változók száma csökkenhet. Például az $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ kvadratikus alak (egyik) kanonikus alakja y_1^2 .

Mi van akkor, ha egy kvadratikus alak mátrixának a főátlójában nincs alkalmas nem-0 elem, amivel ki lehetne nullázni az oszlopát / sorát?

Ekkor végre kell hajtani egy speciális átalakítást a mátrixon: keresni kell egy olyan sort, melyben a főátlóban lévő elem 0, viszont van 0-tól különböző elem a sorban, majd ezt a nem-0 elemet be kell vinni a főátlóba a következő példában leírt módon.

Példa

Határozzuk meg a $x_1^2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alak kanonikus alakját.

A mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy nincs alkalmas "nullázó elem" a főátló 2. helyén.

A következőképpen állíthatunk elő "nullázó elemet": adjuk hozzá a 3. sor felét a 2. sorhoz, és a 3. oszlop felét is a 2. oszlophoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Most már van megfelelő "nullázó elem":

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így az (egyik) kanonikus alak: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

FONTOS: a kanonikus alak nem egyértelműen meghatározott, valójában a változók "összekeveredhetnek", illetve az együtthatók is megváltozhatnak (kivéve az előjelüket).

Tehetetlenégi tétel

Kvadratikus alak kanonikus alakjában a pozitív, illetve negatív együtthatójú négyzetes tagok száma meghatározott.

Megjegyzés

Ha egy kvadratikus alak (egyik) kanonikus alakja például $x_1^2 + x_2^2$, akkor nem lehet egy másik kanonikus alakja $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. Vagyis a kvadratikus alak kanonikus alakjaiban szereplő pozitív, illetve negatív indexek száma a kvadratikus alak egy jellemzője.

Definíció

Egy n változós q kvadratikus alakot

- *pozitív definitnek* nevezünk, ha bármely $x_1, \dots, x_n$ esetén $q(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, és $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ csak akkor, ha $x_1 = \dots = x_n = 0$,
- *pozitív szemidefinitnek* nevezünk, ha bármely $x_1, \dots, x_n$ esetén $q(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, és van olyan $(x_1, \dots, x_n) \neq \underline{0}$, melyre $q(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- *negatív definitnek* nevezünk, ha bármely $x_1, \dots, x_n$ esetén $q(x_1, \dots, x_n) \leq 0$, és $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ csak akkor, ha $x_1 = \dots = x_n = 0$,
- *negatív szemidefinitnek* nevezünk, ha bármely $x_1, \dots, x_n$ esetén $q(x_1, \dots, x_n) \leq 0$, és van olyan $(x_1, \dots, x_n) \neq \underline{0}$, melyre $q(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- *indefinitnek* nevezünk, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Példa

- A $q = x_1^2 + x_2^2$ kétváltozós kvadratikus alak pozitív definit, hiszen $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, és $x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.
- Az $q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ kétváltozós kvadratikus alak pozitív szemidefinit, hiszen $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$, ugyanakkor $(x_1 + x_2)^2 = 0$ teljesül, ha $x_1 = -x_2$ pl: $q(-1, 1) = 0$.
- A $q = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ kétváltozós kvadratikus alak indefinit, hiszen $q(1, 0) = 1 > 0$ és $q(1, 1) = -1 < 0$.

Egy n változós kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha kanonikus alakjában n db pozitív együtthatójú változó van,
- pozitív szemidefinit, ha kanonikus alakjában csak pozitív együtthatójú változó van, de n -nél kevesebb,
- negatív definit, ha kanonikus alakjában n db negatív együtthatójú változó van,
- negatív szemidefinit, ha kanonikus alakjában csak negatív együtthatójú változó van, de n -nél kevesebb,
- indefinit, ha kanonikus alakjában van pozitív és negatív együtthatójú változó is.

Határozzuk meg az $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ kvadratikus alak osztályát.

A kvadratikus alak mátrixát diagonális alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így a kanonikus alak: $y_1^2 + y_2^2$. A kanonikus alakban csak pozitív együtthatók vannak, azonban a változószáma csökkent (3-ról 2-re), ezért pozitív szemidefinit a kvadratikus alak.

Ellenőrzésképpen: ha $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$, akkor a kvadratikus alak értéke tényleg 0.

Pozitív definit kvadratikus alakok

A pozitív definit kvadratikus alakok máshogy is jellemezhetők.

Először szükség van a főminor fogalmára:

Definíció:

Négyzetes mátrix k . főminorán az első k sor, illetve első k oszlop kiválasztásával adódó aldeterminánsát értjük.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix főminora: 1 , $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$, és a teljes determináns, aminek értéke 4 (vegyük észre, hogy $n \times n$ -es mátrix esetén az 1 . főminor mindig a mátrix bal felső eleme, az n . főminor mindig éppen a mátrix determinánsa).

Tétel

Egy kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha minden főminorra pozitív (azaz nem lehet 0 sem).

Példa

$$\sqrt{2}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 2\sqrt{2}x_2x_3 + 40x_3^2$$

kvadratikus alak pozitív definit, hiszen mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 40 \end{pmatrix},$$

melynek főminorai pozitívak: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2} - \frac{1}{9}$, $\frac{350}{3}\sqrt{2} - \frac{148}{9}$.

Stratégiai viselkedés

Definíció

Ha egy ágazat csak néhány vállalatból áll, *oligopóliumnak* nevezzük.

Definíció

Ha egy ágazat csak két vállalatból áll, *duopóliumnak* nevezzük.

Az a vállalat, amelynek néhány versenytársa van, ha árra és kibocsátásra vonatkozó döntéseket hoz, akkor minden ágazati szereplő reakcióját figyelembe kell venni. A stratégiai döntések következményeit a *játékelmélet* segítségével lehet előre jelezni.

A játékokat lehet aszerint osztályozni, hogy van-e a játékosok között összejátszás, ez alapján kooperatív és nem kooperatív játékokat különböztetünk meg.

Nem kooperatív játékok

Nem kooperatív esetben a játék megoldását adja az úgynevezett Nash-féle egyensúlyi helyzetek keresése.

Nash-egyensúly

Egyensúlynak nevezünk egy helyzetet, ha egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni rajta, azaz nem nyer azon, ha kimozdul az adott helyzetből.

Példa

Tekintsünk egy partszakaszt, amin két fagyiarus osztozkodik. a vevők ahhoz az áruhoz mennek, aki hozzájuk közelebb van. Hova álljon a két árus, hogy a lehető legtöbb vevőt szerezze meg?

Többféle igazságos elosztása van a partszakasznak, de csak egy olyan, ami egyensúlyi helyzet: ha mindkét árus a partszakasz felénél árulja a fagyit.

Tekintsünk egy kétszemélyes játékot, ahol mindkét játékosnak véges sok stratégiája van. Ekkor az egyes stratégiapárokhoz rendelhetünk úgynevezett *kifizetéseket*, amellyel azt ábrázoljuk, hogy mennyit nyernek a játékosok, ha az adott stratégiapárt választják. Például két-két stratégia esetén:

Az első játékos kifizetései:

		2. játékos	
		1. strat.	2. strat.
1. játékos	1. strat.	a_{11}	a_{12}
	2. strat.	a_{21}	a_{22}

A második játékos kifizetései:

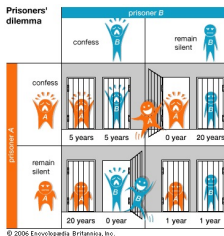
		2. játékos	
		1. strat.	2. strat.
1. játékos	1. strat.	b_{11}	b_{12}
	2. strat.	b_{21}	b_{22}

A kifizetéseket szokás egy mátrixban ábrázolni, ekkor az egyes stratégiapároknál szereplő értékek közül az első mindig az első játékos kifizetése (nyereménye), a második érték pedig a másodiké:

		2. játékos	
		1. strat.	2. strat.
1. játékos	1. strat.	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	2. strat.	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

A legismertebb bimátrixjáték a fogoly-dilemma:

Fogoly-dilemma



Két férfit fegyveres rablással gyanúsítanak, nincs döntő bizonyíték ellenük, de ők ezt nem tudják. A rendőr felajánlja mindegyiküknek, hogy ha bevallja a rablást, de a másik tagad, akkor a beismerő vallomást tevő rabot felmentik, a tagadó rab 20 évet kap. Ha mindketten vallanak, akkor az enyhítő körülmény, így 5-5 évet kapnak. Ha mindketten tagadnak, akkor a rájuk bizonyítható tiltott fegyverviselésért 1-1 évet kapnak.

A táblázat a következő:

		2. rab	
		vall	tagad
1. rab	vall	$-5, -5$	$0, -20$
	tagad	$-20, 0$	$-1, -1$

Ha lenne kooperációra lehetőség, azaz összebeszélhetnének, akkor mindketten a tagadást választhatnák. Ha nincs lehetőség kooperációra, akkor Nash-egyensúlyt kell keresni, azaz azt a helyzetet, ahonnan egyik játékosnak sem éri meg kimozdulni.

A vall-vall helyzet esetén, ha egyoldalúan más stratégiát választanak, akkor rosszabbul járnak, tehát ez Nash-egyensúly.

Hasonló helyzet fordul elő a fegyverkezési verseny, és a kartell megállapodások esetén.

Duopólium esetén (két vállalat alkotja az ágazatot) tegyük fel, hogy a vállalatok csak két stratégia közül választhatnak alacsony vagy magas árat ajánlanak. A profit a következőképpen alakul:

		2. vállalat	
		alacsony	magas
1. vállalat	alacsony	70, 70	140, -10
	magas	-10, 140	100, 100

A nem kooperatív esetben az egyensúly az alacsony-alacsony stratégiapár. Ez az, ahonnan nem éri meg egyoldalúan kimozdulni. A fogoly-dilemmához hasonlóan a kooperáció ennél magasabb kifizetést adna (magas-magas), de annak egyoldalú megszegésével jobban járnak, tehát nem egyensúly.

Legnagyobb kedvezmény elve

A *legnagyobb kedvezmény elve* azt jelenti, hogy a vásárlónak megígérik, hogy ha a jövőben bárki másnak alacsonyabb árat kínálnak, akkor neki is ezen az alacsonyabb áron adják a terméket. Ha az árváltoztatás miatti költséget 50 egységnek vesszük, akkor a következőképpen alakul a profit:

		2. vállalat	
		alacsony	magas
1. vállalat	alacsony	70, 70	90, -10
	magas	-10, 90	100, 100

Tehát lemondanak arról, hogy nyerjenek az árcsökkentésen, ehelyett egy olyan rendszert alakítottak ki, ahol az árcsökkentés veszteséghez vezet. Elérték azt, hogy egyik vállalat se akarja az árat csökkenteni.

1. Gondolkodnivaló

Vegyük észre, hogy egy q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha $-q$ pozitív definit. Ezt felhasználva adjuk meg a negatív definit kvadratikus alakok jellemzését a mátrixuk főminorai segítségével.

2. Gondolkodnivaló

Egy duopólium két tagjának kifizetéseit (nyereségét) mutatja az alábbi táblázat. A vállalatoknak két stratégiája van, kicsi vagy nagy kibocsátást választhatnak.

		2. vállalat	
		kicsi	nagy
1. vállalat	kicsi	130, 130	80, 140
	nagy	140, 80	50, 50

Milyen stratégiát válasszanak, ha

- (a) egyszerre lépnek a vállalatok;
- (b) először az 1. vállalat lép, azután a 2. vállalat;
- (c) először az 1. vállalat, majd a 2. vállalat, végül megint az 1. vállalat lép.