

10. Előadás

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

Valamint igazoljuk általánosan, hogy invertálható trianguláris mátrixok inverze is trianguláris.

Határozzuk meg a mátrix inverzét elemei bázistranszformációval úgy, hogy mindig a főátlóban lévő elemet választjuk rendre az első oszloptól kezdve:

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 1^* & -2 & 3 \\ e_2 & 0 & -1 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 1 & -2 & 3 \\ e_2 & 0 & -1^* & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & x_3 \\ \hline v_1 & 1 & -2 & 1 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline v_1 & 1 & -2 & -1 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Mivel rendre a főátlóból választottuk a generáloelemet, így a v -s sorok, és az e -s oszlopok indexei is sorban helyezkednek el, az inverz a táblázatban szereplő mátrix lesz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Általánosan megfogalmazva:

Állítás

Invertálható trianguláris mátrixok inverze is trianguláris.

Bizonyítás: Egy mátrix invertálható (azaz létezik inverze), ha a determinánsa nem nulla. Mivel a trianguláris mátrixok determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, így egy invertálható trianguláris mátrix főátlójában csupa 0-tól különböző elem van. Ha az inverzét elemi bázistranszformációval számítjuk, akkor először generálóelemnek választva a főátló első, majd második, stb. elemét, a főátló alatt (vagy felett) minden elem 0 marad (ld.: a példát). Ugyanakkor ha elemi bázistranszformációk során minden generálóelemet a főátlóból választunk ki, akkor az indexek nem fognak összekeveredni, így nincs szükség sor- és oszlopcserékre. Tehát az inverz a táblázatban szereplő trianguláris mátrix lesz.

2. Gondolkodnivaló

Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenletet a p valós paraméter értékétől függően

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrixegyenlet $XA = B$ típusú, először transzponálni kell:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & -4 \end{pmatrix}.$$

Így már beírható a táblázatba.

	x_1	x_2	b_1	b_2	$\rightarrow$		x_2	b_1	b_2
e_1	1^*	-1	1	2		x_1	-1	1	2
e_2	-2	2	p	-4		e_2	0	$p+2$	0

$$\begin{array}{c|cc} & x_2 & b_1 & b_2 \\ \hline x_1 & -1 & 1 & 2 \\ e_2 & 0 & p+2 & 0 \end{array}$$

1. eset: $p + 2 \neq 0 \Rightarrow p \neq -2$.

A mátrixegyenletnek nincs megoldása.

2. eset: $p + 2 = 0 \Rightarrow p = -2$.

Az x_2 szabad ismeretlen, végtelen sok megoldás van. Az x_1 az x_2 segítségével hasonlóan fejezhető ki, mint a lineáris egyenletrendszereknél: $x_1 = x_2 + b_i$. A lineáris egyenletrendszerek megoldásai vektor alakban megadva az X^T mátrix oszlopvektorait alkotják:

$$X^T = \begin{pmatrix} a+1 & b+2 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ b+2 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Leontyev-modell

Tegyük fel, hogy egy gazdaság 3 fő ágazatból áll: mezőgazdaság, ipar és szállítás. Mindegyik ágazatnak 1 egységnyi termék előállításához szüksége van mindhárom ágazat termékeire.

Ráfordítási mátrix

A gazdaság egy mátrixszal írható le, ezt *ráfordítási mátrixnak* hívjuk. A mátrix oszlopai mutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre szükség az egyes ágazatoktól.

Példa

Ráfordítási mátrix:

$$\begin{matrix} & M & I & S \\ \begin{matrix} M \\ I \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

A ráfordítási mátrixszal kapcsolatban sok kérdés tehető fel:

- Adott termékmennyiség előállítása során mennyi terméket kell legyártani?
- "Működőképes"-e a gazdaság?
- Milyen árak mellett lehet az összprofitot maximalizálni?
- Milyen egyensúlyi helyzetei vannak a gazdaságnak?

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{array}{c} M \quad I \quad S \\ \begin{array}{c} M \\ I \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Szeretnénk előállítani 2 M, 1 I és 3 S terméket. Mennyi terméket kell ehhez összesen előállítani (teljes kibocsátás)?

Az egyes ágazatokban előállítandó termékek számát vektorként is megadhatjuk, jelölje ezt p (a példában $p^T = (2, 1, 3)$), ez az úgynevezett *nettó kibocsátás*. Jelöljük a ráfordítási mátrixot A -val, ekkor 1 lépésben $A \cdot p$ termékre van szükség. A probléma az, hogy ezeknek a termékeknek az előállításához is ismét $A \cdot Ap$ termékre van szükség, és így tovább. Így kapjuk a $p + Ap + A^2p + A^3p + \dots$ végtelen sort.

Végiggondolható, ha q a teljes kibocsátás, akkor ennyi termék előállításakor Aq terméket használunk fel, és még marad is p termék:

$$q = Aq + p.$$

Tehát

$$q = (E - A)^{-1}p.$$

A példában szereplő ráfordítási mátrix és nettó kibocsátás:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak kell az inverzét meghatározni.

Az $E - A$ inverze:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.61 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

A teljes kibocsátás így:

$$(E - A)^{-1}p = \begin{pmatrix} 1.61 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.6 \\ 3.38 \\ 4.61 \end{pmatrix}.$$

Definíció

Ha A egy gazdaság ráfordítási mátrixa, akkor az $(E - A)^{-1}$ mátrixot az A mátrix *Leontyev-inverzének* nevezzük.

A Leontyev-inverz mutatja meg, hogy egy-egy termék előállításához összesen mennyi kibocsátásra van szükség. Minél kisebbek az elemei, annál hatékonyabb a gazdaság. Ha valahol negatív értékek szerepelnek benne, az annak a jele, hogy a gazdaság hosszú távon nem működőképes.

Működőképes-e az a gazdaság, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix}.$$

Ha a Leontyev-inverzben $((E - A)^{-1}$ -ben) valahol negatív érték szerepel, akkor a gazdaság nem működőképes.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -295.71 & -320 & -264.29 \\ -232.86 & -250 & -207.14 \\ -185.71 & -200 & -164.29 \end{pmatrix}$$

TOTÁLIS KATASZTRÓFA

Az ok nyilvánvaló: a gazdaság működése többbe kerül, mint amennyit termel. Ilyenkor meg lehet vizsgálni, hogy megmenthető-e a gazdaság, van-e esetleg olyan ágazat, amelynek hatékonyságát kicsit (kis költséggel) növelve, a gazdaság már működőképes.

Változtassunk a probléma bemenő adatain egy kicsit, és vizsgáljuk, hogy mennyire változik a végeredmény (ez az úgynevezett érzékenység-vizsgálat). Esetünkben a helyzet menthető:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.17 \end{pmatrix},$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 467.78 & 502.22 & 411.11 \\ 365.56 & 394.44 & 322.22 \\ 288.89 & 311.11 & 255.56 \end{pmatrix}.$$

Ez sem túl hatékony gazdaság, hiszen a mátrix elemei nagyok, de legalább már működőképes.

A ráfordítási mátrix alkalmas az ágazatonkénti költség és profit meghatározására is.

Példa

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix},$$

és legyen az ágazatok termékeinek árvektora

$$v = (1 \quad 2 \quad 3).$$

Határozzuk meg az egyes ágazatok egységnyi termékének előállításakor keletkező költséget.

A keletkező költség a vA képlet segítségével számolható:

$$vA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 & 2.2 & 1.64 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy az első két ágazat ilyen árak mellett veszteséges. Az első ágazat esetén 1 egységnyi árhoz 1.7 egységnyi előállítási költség tartozik, míg a második ágazatnál a 2 egységnyi árhoz 2.2 költség. A harmadik ágazat nyereséges, itt a profit $3 - 1.64 = 1.36$ egység.

Korábban láttuk, hogy az a gazdaság, amelynek ez az A mátrix a ráfordítási mátrixa nem működőképes. Be lehet bizonyítani, hogy egy gazdaság pontosan akkor működőképes (vagyis mátrixának Leontyev-inverzében nem szerepel negatív szám), ha meg lehet úgy határozni az árakat, hogy semelyik ágazat se legyen veszteséges.

Egyensúlyi helyzet esetén öncélú a rendszer: a termelés felemészti az összes terméket. Vagyis adott mennyiségű (p vektor) terméket szeretnénk előállítani, úgy, hogy ehhez éppen p termékre legyen szükség:

$$Ap = p.$$

Ez a mátrixok sajátértékének, sajátvektorának fogalmához vezet.

Egy ilyen gazdaság nem igazán működőképes, de ha valahonnan kap megfelelő mennyiségű kezdő terméket, akkor működik, azonban valódi termelésre képtelen.

Sajátérték, sajátvektor

Definíció

Az A $n \times n$ -es mátrixnak *sajátértéke* a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$ nem-zérusvektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$.

Definíció

Az A $n \times n$ -es mátrixnak *sajátvektora* a $v \in \mathbb{R}^n$ nem-zérusvektor, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$.

Megjegyzés

A definíciókban azért szerepel v^T , mert $\mathbb{R}^n$ elemeit sorvektorokként írjuk, de itt jobbról szorzunk a vektorral egy mátrixot, amit csak akkor tudunk elvégezni, ha oszlopvektorként szerepel.

Példa

Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a -3 , és sajátvektora az $(1, -2)$, mert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sajátértékek meghatározása

Az $A\underline{x}^T = \lambda\underline{x}^T$ feltétel valójában egy homogén lineáris egyenletrendszerre vezet, ugyanis

$$A\underline{x}^T = \lambda\underline{x}^T \iff (A - \lambda E)\underline{x}^T = \underline{0}.$$

Azt kell vizsgálni, hogy ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek milyen feltételek mellett van nemtriviális megoldása (ugyanis definíció szerint $\underline{x}$ nem-zérusvektor).

Ha A $n \times n$ -es mátrix, akkor a fenti egyenletrendszer megoldásakor $n - r$ db szabad változó marad (ahol r az $A - \lambda E$ mátrix rangja).

Mivel homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha van szabad változója, így ez akkor teljesül, ha $A - \lambda E$ rangja kisebb, mint n , vagyis ha az $A - \lambda E$ mátrix determinánsa 0.

Tétel

Az A mátrixnak λ pontosan akkor sajátértéke, ha az $A - \lambda E$ mátrix determinánsa 0.

Definíció

Az $|A - xE|$ polinomot az A mátrix *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.

Tétel

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Példa

Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2.$$

Az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet megoldásai: 1, 2. Tehát a mátrix sajátértékei: 1, 2.

Példa

Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 4 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 4.$$

Az $x^2 - 3x + 4 = 0$ egyenlet megoldásánál a diszkrimináns negatív ($D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -5$), így az $x^2 - 3x + 4$ polinomnak nincs valós gyöke, azaz a mátrixnak nincs valós sajátértéke.

Sajátaltér meghatározása

Tétel

Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai alteret alkotnak. Ezen altér neve: az adott sajátértékhez tartozó *sajátaltér*.

Tétel

Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda E)\underline{x}^T = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális rendszere.

Példa

Adjuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix 2 sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

Az $(A - 2E)\underline{x}^T = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 + 5x_3 \\ x_2 + x_3 \\ -2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Azaz

$$\begin{aligned} 5x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek egy megoldása:

x_1, x_3 szabad változó, és $x_2 = -x_3$.

Így a sajátaltér egy bázisa: $(1, 0, 0), (0, -1, 1)$.

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Gondolkodnivaló

Határozzuk meg, hogy az x valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi A mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & x \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Ezen x értékek közül, mikor lesz a $(2, 3)$ árvektorral rendelkező termék előállítása minden ágazatban nyereséges?

2. Gondolkodnivaló

Adjuk meg, hogy az alábbi A mátrixnak mely α értékekre lesz sajátértéke a -5 . Ezen α -ák esetén határozzuk meg a -5 sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 1 & \alpha - 5 & -2 \\ -2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}.$$