
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A103

FELADATOK A GYAKORLATRA (6.)

2018/2019. TAVASZI FÉLÉV

SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR, KVADRATIKUS ALAKOK

6.1. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében.

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

MEGOLDÁS. (a) $(1, 1/3, 2/3)$;

(b) $(1, -2, 1, 3)$;

(c) $(1, 0, -1, -1), (0, 1, -2, 0)$;

(d) $(1, 0, 0, 3/5, 1/5), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 7/5, -1/5)$.

6.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(f) \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) nincs valós sajátérték;

(b) 0 és 3;

(c) 2 (kétszeres);

(d) 3, $(1 \pm \sqrt{5})/2$;

(e) -2 és 2 (kétszeres);

(f) -1, 2 és 3.

6.3. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist.

$$(a) A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 1;$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2;$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \lambda = -1;$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2.$$

MEGOLDÁS. (a) $(0, 1, -2)$,

(b) $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$;

(c) $(0, -1, 1), (1, -2, 0)$;

(d) $(-1, -1, 1)$.

6.4. Feladat. Sajátvektora-e a v vektor az A mátrixnak?

$$(a) v = (3, 4)^T, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(b) v = (0, 0)^T, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(c) v = (5, 4, 4)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(d) v = (9, -5, 8)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) igen,

(b) nem,

- (c) igen,
(d) nem.

6.5. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.).

- (a) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$; (b) $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
(c) $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$; (d) $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(e) $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$; (f) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

MEGOLDÁS.

	Kanonikus alak	Osztály
(a)	y_1^2	pozitív szemidefinit
(b)	$-y_1^2 - y_2^2$	negatív definit
(c)	$y_1^2 + y_2^2$	pozitív szemidefinit
(d)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$	pozitív definit
(e)	$-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$	indefinit
(f)	$-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$	indefinit

6.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy $(n \times n)$ -es mátrix determinánsa 1, akkor a rangja n . (Igaz)
(b) Ha egy $(n \times n)$ -es mátrix determinánsa 0, akkor a rangja $n - 1$. (Hamis)
(c) Ha egy $(k \times l)$ -es mátrix két sora arányos, akkor a rangja nem lehet k . (Igaz)
(d) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek nincs megoldása. (Hamis)
(e) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 ismeretlent tartalmaz. (Igaz)
(f) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 egyenletből áll. (Hamis)
(g) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszernek több változója van, mint egyenlete, akkor a megoldástere legalább 1 dimenziós. (Igaz)
(h) Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az 1. (Hamis)
(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátvektora a $(-1, 1, 1)$. (Igaz)
(j) Ha u és v egy A mátrix sajátvektorai, akkor $u + v$ is. (Hamis)
(k) Ha λ és ν sajátértékei egy A mátrixnak, akkor $\lambda + \nu$ is sajátértéke A -nak. (Hamis)
(l) Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorai rendre -1 , -3 és -5 , akkor a kvadratikus alak negatív definit. (Hamis)
(ly) Ha egy kvadratikus alak mátrixának sajátértéke az 1, akkor a kvadratikus alak pozitív definit. (Hamis)

A 6.7-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

6.7. Feladat. Egy homogén lineáris egyenletrendszernek...

- (a) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.
(b) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nulla.
(c) mindig van megoldása.
(d) mindig pontosan egy megoldása van.

MEGOLDÁS. (c)

6.8. Feladat. Tekintsünk egy n -változós homogén lineáris egyenletrendszert, amely megoldásainak altere két dimenziós. Vegyünk egy v_1, v_2 lineárisan független vektorrendszert a megoldásainak alterében. Ekkor az u vektor pontosan akkor megoldása az egyenletrendszernek, ha $u \dots$

- (a) skalárszorosa vagy a v_1 , vagy a v_2 vektornak.
- (b) összege a v_1 és v_2 vektoroknak.
- (c) a zérusvektorral egyenlő, azaz v_1 és v_2 egymás ellentettje.
- (d) tetszőleges lineáris kombinációja a v_1 és v_2 vektoroknak.

MEGOLDÁS. (d)

6.9. Feladat. Tekintsünk egy n -változós homogén lineáris egyenletrendszert, és legyen az együttható-mátrixának rangja r . Ekkor az egyenletrendszer megoldásterének dimenziója...

- (a) mindig kisebb, mint r .
- (b) mindig nagyobb, mint r .
- (c) pontosan r .
- (d) pontosan $n - r$.

MEGOLDÁS. (d)

6.10. Feladat. Egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer megoldásteré...

- (a) mindig tartalmazza a zérusvektort.
- (b) sohasem tartalmazza a zérusvektort.
- (c) kizárólag a zérusvektorból áll.
- (d) mindig tartalmaz a zérusvektortól különböző elemet.

MEGOLDÁS. (a)

6.11. Feladat.

- (a) Egy négyzetes mátrixnak mindig van legalább egy sajátértéke a valós számok között.
- (b) Ha egy négyzetes mátrixnak van legalább egy sajátértéke a valós számok között, akkor van több is.
- (c) Ha egy mátrixnak van sajátértéke a valós számok között, akkor az csak négyzetes mátrix lehet.
- (d) Ha egy mátrixnak nincs sajátértéke a valós számok között, akkor az nem lehet négyzetes mátrix.

MEGOLDÁS. (c)

6.12. Feladat.

- (a) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van a valós számok körében gyöke.
- (b) Ha egy mátrix karakterisztikus polinomjának van legalább egy gyöke, akkor van több is.
- (c) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van egynél több gyöke.
- (d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

MEGOLDÁS. (d)

6.13. Feladat. Egy mátrix adott λ sajátértékéhez tartozó sajátaltere...

- (a) kizárólag az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektorból áll.
- (b) tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
- (c) nem tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
- (d) tartalmazza a mátrix összes sajátértékéhez tartozó összes sajátvektort.

MEGOLDÁS. (b)

6.14. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója...

- (a) lehet nagyobb, mint 3.
- (b) mindig pontosan 3.
- (c) lehet kisebb, mint 3.
- (d) pontosan akkor lehet 3, ha van a λ sajátértékhez tartozó 3 különböző sajátvektor.

MEGOLDÁS. (c)

6.15. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója...

- (a) mindig pontosan n .
- (b) lehet, hogy kisebb, mint n , de nagyobb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.
- (c) egyenlő az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangjával.
- (d) lehet kisebb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.

MEGOLDÁS. (d)

6.16. Feladat. Egy n -változós kvadratikuss alak kanonikus alakjában...

- (a) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig pontosan n .
- (b) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig kisebb, mint n .
- (c) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma legfeljebb n .
- (d) van elsőfokú tag, ha a kvadratikuss alak szemidefinit.

MEGOLDÁS. (c)

6.17. Feladat. Egy kvadratikuss alak mátrixa...

- (a) transzponáláskor nem változik.
- (b) ha tartalmaz nullát, akkor a kvadratikuss alak szemidefinit.
- (c) felső trianguláris mátrix, ha a kvadratikuss alak pozitív definit.
- (d) mindig diagonális mátrix.

MEGOLDÁS. (a)

6.18. Feladat.

- (a) Negatív definit kvadratikuss alak minden főminorára negatív.
- (b) Pozitív definit kvadratikuss alak minden főminorára pozitív.
- (c) Pozitív definit kvadratikuss alak főminorai felvehetnek pozitív és negatív értékeket is.
- (d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

MEGOLDÁS. (b)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

6.19. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 14x_3 = a \end{cases}$$

6.20. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + ax_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

6.21. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

- (a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
- (b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
- (c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
- (d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
- (e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
- (f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
- (g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

6.22. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a valós paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldástérben.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - ax_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

6.23. Feladat. Adjuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melyekre az alábbi mátrixnak a λ valós szám nem sajátértéke.

(a) $\begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a+2 & a \end{pmatrix}, \lambda = -2;$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2.$

6.24. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ sajátvektora.

6.25. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó (3×3) -as mátrixot, melynek a -3 sajátértéke.

6.26. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ és $(2, 1, -1)$ sajátvektorai.

6.27. Feladat. Az a valós paraméter milyen értékei esetén sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak?
