
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A103

FELADATOK A GYAKORLATRA (5.)

2018/2019. TAVASZI FÉLÉV

VEKTORTÉR, ALTÉR, GENERÁLÁS, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG, BÁZIS

5.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

- (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$; (b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1x_2 + x_3 = 0\}$; (d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$; (f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$;
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

MEGOLDÁS. (a) altér; (b) nem altér; (c) nem altér; (d) nem altér; (e) altér; (f) altér; (g) nem altér.

5.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

- (a) $v = (1, -1, 1)$, $U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$; (b) $v = (1, 1, 1)$, $U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$; (d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

MEGOLDÁS. (a) igen; (b) nem; (c) igen; (d) nem.

5.3. Feladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben.

- (a) $(1, 2, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (b) $(1, -1, 1), (0, 0, 0)$, $V = \mathbb{R}^3$; (c) $(2, 4, -2), (3, 6, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $(1, 1, 2), (1, 1, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (e) $(1, 2), (1, 3)$, $V = \mathbb{R}^2$.

MEGOLDÁS.

	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	igen	nem	nem
(b)	nem	nem	nem
(c)	nem	nem	nem
(d)	igen	nem	nem
(e)	igen	igen	igen

5.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

- (a) $(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)$;
(b) $(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)$;
(c) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)$;
(d) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)$;
(e) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)$;
(f) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)$;
(g) $(-1, 3, 1, 2), (-8, 3, 1, -2), (2, 6, 2, 11), (-2, 3, 1, 1)$;
(h) $(5, -2, -8, 4), (3, 1, 1, -2), (6, 1, -1, -4), (3, 3, 7, 1)$.

MEGOLDÁS.

	Rang	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	3	nem	nem	nem
(b)	2	nem	nem	nem
(c)	3	igen	nem	nem
(d)	2	nem	nem	nem
(e)	4	nem	igen	nem
(f)	3	nem	nem	nem
(g)	4	igen	igen	igen
(h)	4	igen	igen	igen

5.5. Feladat. Az α paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerrel, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

- (a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, \alpha, 10);$
- (b) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, \alpha^2), (2, -1, \alpha + 4);$
- (c) $(1, 2, 1, 2), (-1, -1, 0, -1), (2, -1, \alpha^2, \alpha + 4);$
- (d) $(1, 2, -1, -1), (-1, -1, 3, 3), (2, 5, \alpha, \alpha), (1, 0, \alpha^2 - \alpha - 5, -5);$
- (e) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, \alpha^2), (2, -1, \alpha + 4).$

MEGOLDÁS. (a) Ha $\alpha = 7$, akkor lineárisan függő, egyébként lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.

(b) A vektorrendszer minden α valós számra lineárisan függő, generátorrendszer, így nem bázis.

(c) A vektorrendszer minden α valós számra lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.

(d) Ha $\alpha \neq 0, 1$, akkor vektorrendszer bázis, azaz lineárisan független generátorrendszer. Ha $\alpha \in \{0, 1\}$, akkor nem lineárisan független, nem generátorrendszer és nem bázis.

(e) A vektorrendszer minden α valós számra generátorrendszer, de nem lineárisan független.

5.6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

- (a) $V = [(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)];$
- (b) $V = [(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)];$
- (c) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)];$
- (d) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)];$
- (e) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)];$
- (f) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)].$

MEGOLDÁS. (a) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0);$

(b) $\dim(V) = 2$, bázis V -ben: $(1, 0, 5/4, -1/2), (0, 1, -3/4, 1/2);$

(c) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1);$

(d) $\dim(V) = 2$, bázis V -ben: $(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, 1);$

(e) $\dim(V) = 4$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1);$

(f) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1).$

5.7. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

- (a) $v = (0, 0, 0)$, bázis: $(3, -2, 1), (-2, 5, 7), (2, 1, 2);$
- (b) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1);$
- (c) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9);$
- (d) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4);$
- (e) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5);$
- (f) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6).$

MEGOLDÁS. A v vektor koordinátasora:

(a) $(0, 0, 0);$ (b) $(0, -1, 0);$ (c) $(-1/2, 0, 0);$ (d) $(3, -4, 2);$ (e) $(3, 2, 1);$ (f) $(-2/3, -1/3, 4/3).$

5.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeteminánszt.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) a mátrix rangja 1, nem 0 értékű aldetemináns: $(1);$

(b) a mátrix rangja 2, nem 0 értékű aldetemináns: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

(c) a mátrix rangja 3, nem 0 értékű aldetemináns: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$

5.9. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a)

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix rangja} = \begin{cases} 2, & \text{ha } a = 3, \\ 3, & \text{különben.} \end{cases}$$

(b)

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ mátrix rangja} = \begin{cases} 2, & \text{ha } a = 1, \\ 4, & \text{különben.} \end{cases}$$

5.10. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy vektortér valamely részhalmaza zárt az összeadásra, akkor az altér. **(Hamis)**
- (b) Bármely vektortér bármely altere zárt vektorok kivonására nézve. **(Igaz)**
- (c) Ha egy vektortérnek van 0 -tól különböző eleme, akkor végtelen sok eleme van. **(Igaz)**
- (d) Bármely vektortérnek van altere. **(Igaz)**
- (e) A $v_1, \dots, v_n$ vektorok bármely lineáris kombinációja eleme az általuk generált altérnek. **(Igaz)**
- (f) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$. **(Igaz)**
- (g) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$. **(Hamis)**
- (h) Ha egy vektorrendszer tartalmazza a 0 vektort, akkor lineárisan függő. **(Igaz)**
- (i) Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő. **(Hamis)**
- (j) Az egy vektorból álló vektorrendszerek mind lineárisan függetlenek. **(Hamis)**
- (k) $\mathbb{R}^5$ -ben bármely 6 tagú vektorrendszer lineárisan függő. **(Igaz)**
- (l) $\mathbb{R}^5$ -ben nincs 4 tagú generátorrendszer. **(Igaz)**
- (ly) $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszer rangja mindig kisebb, vagy egyenlő, mint n . **(Igaz)**
- (m) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával. **(Igaz)**
- (n) Ha V -nek van n elemű bázisa, akkor nincs $n+1$ elemű lineárisan független vektorrendszere. **(Igaz)**
- (o) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor a dimenziója n . **(Hamis)**
- (p) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, illetve n elemű generátorrendszer is, akkor n dimenziós. **(Igaz)**
- (q) Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú. **(Igaz)**
- (r) Legyen a V vektortérben a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, az $u_1, \dots, u_n$ pedig generátorrendszer. Ekkor $k \leq n$. **(Igaz)**
- (s) Ha a V vektortér egy bázisa v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , és a v vektor koordinátasora ebben a bázisban $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, akkor v tagja a bázisnak. **(Igaz)**
- (t) Az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, -1, 3)$ bázisában a $(2, -2, 5)$ vektor koordinátasora $(1 \ 0 \ 1)$. **(Igaz)**

Az 5.11-22. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

5.11. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0\}$ alterek $\mathbb{R}^3$ -ben, ekkor...

- (a) $U \subseteq V$, de $U \not\subseteq V$ (b) $V \subseteq U$, de $V \not\subseteq U$ (c) $U \leq V$ (d) $V \leq U$

MEGOLDÁS. (d)

5.12. Feladat. Tetszőleges $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén...

- (a) az u_1, u_2, u_3 vektorrendszer lineárisan független.
(b) az u_1 vektorrendszer lineárisan független.
(c) az u_1, u_2, u_3, u_4 vektorrendszer lineárisan függő.
(d) az u_1, u_2 vektorrendszer lineárisan függő.

MEGOLDÁS. (c)

5.13. Feladat. Az a, b, c, d paraméterek között legalább hány különböző értékűnek kell lennie, hogy az $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ vektorrendszer lineárisan független legyen?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

MEGOLDÁS. (b)

5.14. Feladat. Tetszőleges $U \leq \mathbb{R}^3$ altér esetén, melyik állítás NEM teljesül?

- (a) $0 \in U$.
(b) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.
(c) Van olyan $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, amelyre $[u_1, u_2] = U$.
(d) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $[u_1, u_2] \subseteq U$.

MEGOLDÁS. (c)

5.15. Feladat. Tetszőleges $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat írjuk be egy mátrix soraiba, majd a mátrixot hozzuk lépcsős alakra. A lépcsős alakú mátrix nemnulla sorait jelölje $v_1, \dots, v_j$.

- (a) Ha $j < k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független.
(b) Ha $k = j$, akkor az $v_1, \dots, v_j$ vektorrendszer lineárisan függő.
(c) Ha $k > n$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ bázisa.
(d) Az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja j .

MEGOLDÁS. (d)

5.16. Feladat. Az alábbiak közül melyik halmaz nem egy 3-dimenziós vektortér?

- (a) $\mathbb{R}^3$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1 + x_2)(x_3 - x_4 + 2x_5) = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 + (2x_5 + x_6)^2 = 0\}$

MEGOLDÁS. (c)

5.17. Feladat. Az alábbiak közül hány dimenziós nem lehet egy 3 különböző vektor által kifeszített vektortér?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

MEGOLDÁS. (a)

5.18. Feladat. Egy $(n \times n)$ -es mátrix minden eleme 1. Legalább hány darab 1-est kell 0-ra cserélnünk, hogy a mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkossák?

- (a) $n - 2$ (b) $n - 1$ (c) n (d) $n(n - 1)/2$

MEGOLDÁS. (b)

5.19. Feladat. Tudjuk, hogy $U, V \leq \mathbb{R}^n$, továbbá, hogy $U \cap V = \{0\}$, ekkor...

- (a) $\dim U + \dim V \leq n$. (b) $\dim U + \dim V = n$.
(c) $\dim U + \dim V > n$. (d) az előzőek közül egyik sem biztos.

MEGOLDÁS. (a)

5.20. Feladat. Melyik állítás NEM teljesül?

- (a) Van olyan mátrix, amelynek rangja 0.
(b) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\max(m, n)$.
(c) Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amelynek a rangja $\max(m, n)$.
(d) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\min(m, n)$.

MEGOLDÁS. (c)

5.21. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorvektorai alkotják az $U \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét. Az alábbiak közül melyik egyezik meg az U altér dimenziójával?

- (a) Az A mátrix determinánsa.
(b) Az A mátrix rangja.
(c) Az A mátrix nyoma (a főátlóban lévő elemek összege).
(d) Az előbbiek közül egyik sem.

MEGOLDÁS. (b)

5.22. Feladat. Ha a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasora az u_1, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, 1)$, akkor...

- (a) $v \in [u_1, u_2]$.
(b) az u_1, v, u_3 vektorrendszer is bázis.
(c) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, -1)$.
(d) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban ugyanaz, mint a v, u_3, u_2 bázisban.

MEGOLDÁS. (c)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

5.23. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

5.24. Feladat. Legyen

- (a) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (1, 3, -4, 2)]$;
(b) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (-2, 2, 2, 2)]$;

két altér az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.25. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = [(1, 2, 1)]$ altérek $\mathbb{R}^3$ -ban. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.26. Feladat. Legyen

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\},$$

$$V = [(1, 2, 4, -5), (2, 1, 3, -4)].$$

Igaz-e, hogy $U = V$?

5.27. Feladat. Döntsük el, hogy az a valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme az $(-1, -3, a + 1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér U altérének:

- (a) $U = [(1, 2, -a), (1, 1, 0), (1, a + 2, -2)]$; (b) $U = [(1, -1, 1), (1, 0, 1 - a), (-1, a + 1, -2)]$.

5.28. Feladat. Hány maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánsa van az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?
