
LINEÁRIS ALGEBRA
(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A103

FELADATOK A GYAKORLATRA (1.)

2018/2019. TAVASZI FÉLÉV

MÁTRIXOK

1.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2 \quad 0), \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \sqrt{10}/2 & 0.6 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek):

- (a) AB, BA, CB, BC, DC, CD ; (b) BF, F^2, GH ;
(c) $EB^T, E^T A, D^T C^T$; (d) $(A+B)C, (A+B^T)D, AD+B^T D$.

MEGOLDÁS. (a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, CB = (-1 \quad 4), BC$ nem definiált,

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, CD = (-1);$$

(b) BF nem definiált, $F^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, GH = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}} & \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{5} \\ \frac{3}{50} & \frac{17}{50} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.87298 & 2.03538 \\ 0.474342 & 0.34 \end{pmatrix};$

(c) $EB^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, E^T A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D^T C^T = (-1);$

(d) $(A+B)C$ nem definiált, $(A+B^T)D = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}, AD+B^T D = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}.$

1.2. Feladat. Számítsuk ki az $f = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ helyen.

MEGOLDÁS. Az f polinom A helyen vett helyettesítési értéke:

$$f(A) = A^2 + 3 \cdot A - 4 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -12 \\ 26 & 12 & -2 \\ 22 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.3. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A -val, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

MEGOLDÁS. A B mátrix pontosan akkor cserélhető fel az A mátrixszal, ha vannak olyan a és b valós számok, amelyekre $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ teljesül.

1.4. Feladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 90%-a dolgozó marad, 10%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 30%-a talál munkát és 70%-a marad munkanélküli. Jelenleg 8 000 000 dolgozó és 2 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1, 2, illetve 4 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

Plusz gondolkodnivaló: mi történik, ha a modellbe bevesszük a lakosság nemekre osztását is? Igaz-e, hogy ekkor is egyértelmű a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete?

MEGOLDÁS. A munkanélküliségi ráta 1 év múlva 22%, 2 év múlva 23.2%, illetve 4 év múlva 24.352%. A munkanélküliségi rátának van egyensúlyi helyzete: 25%.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq k \leq n$ -re legyen

$$\mathbf{e}_{k,n} = (0 \dots 0 \underbrace{1}_{k\text{-adik komp.}} 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{és} \quad \mathbf{1}_n = (1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

1.5. Feladat. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazóközterben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6 \times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i -edik jelöltre a j -edik körzetben hányan szavaztak. Milyen jelentést tulajdoníthatunk a következő kifejezéseknek:

(a) $\mathbf{e}_{1,6}^T \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}$;

(b) $\mathbf{1}_6^T \cdot A \cdot \mathbf{e}_{5,15}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

MEGOLDÁS. (a) Az 1. jelöltre leadott szavazatok.

(b) Az 5. körzetben leadott szavazatok.

A második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma

$$\frac{\mathbf{e}_{2,6}^T \cdot A \cdot \mathbf{e}_{6,15}}{\mathbf{1}_6^T \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}} \cdot 100$$

százaléka az összes érvényes szavazatnak.

1.6. Feladat. Egy áruházban tizenkét féle dobozos söröt tartanak. Az elmúlt év júliusában regisztrálták a napi fogyást: az $A \in \mathbb{R}^{31 \times 12}$ mátrix i -edik sorának j -edik eleme azt jelenti, hogy július i -edik napján hány darab fogyott a j -edik fajta sörből. A $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times 12}$ mátrix a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek:

(a) $\mathbf{e}_{3,31}^T \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$;

(b) $\mathbf{1}_{31}^T \cdot A$;

(c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sörből származó árbevétel júliusban.

MEGOLDÁS. (a) $\mathbf{e}_{3,31}^T \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$: a harmadik napon elfogyott sör ára,

(b) $\mathbf{1}_{31}^T \cdot A$: a júliusban fogyasztott sör mennyisége fajtákra lebontva,

(c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$: a júliusban fogyasztott sör mennyisége napokra lebontva.

1.7. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Bármely A mátrix esetén AA^T létezik. (Igaz)

(b) Bármely A mátrix esetén AA^T egy négyzetes mátrix. (Igaz)

(c) Bármely A mátrix esetén AA^T és $A^T A$ azonos méretű négyzetes mátrixok. (Hamis)

(d) Bármely A és B ($n \times n$)-es mátrix esetén AB és BA azonos méretű négyzetes mátrixok. (Igaz)

(e) Bármely A és B mátrix esetén ha $A + B$ létezik, akkor AB is. (Hamis)

(f) Bármely A és B mátrix esetén ha $A + B$ létezik, akkor AB^T is. (Igaz)

(g) Bármely A és B ($n \times n$)-es mátrix esetén $AB = BA$. (Hamis)

(h) Bármely A mátrix esetén $(A^T)^T = A$. (Igaz)

(i) Ha egy mátrix szimmetrikus, akkor négyzetes. (Igaz)

- (j) Ha az A és B mátrixokra $AB = BA$ teljesül, akkor az A és B mátrixok négyzetesek. (Igaz)
 (k) Bármely A és B azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

(Hamis)

- (l) Ha az A és B azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

teljesül, akkor $A = B$. (Hamis)

Az 1.8-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.8. Feladat. Legyen az A mátrix (2×3) -as valós mátrix.

- (a) Az AA^T és $A^T A$ szorzatok definiáltak.
 (b) Az AA^T és $A^T A$ szorzatok nem definiáltak.
 (c) Az AA^T szorzat definiált, de az $A^T A$ szorzat nem definiált.
 (d) Az AA^T szorzat nem definiált, de az $A^T A$ szorzat definiált.

MEGOLDÁS. (a)

1.9. Feladat. Legyenek adottak az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ mátrixok. Ekkor ...

- (a) az ABC szorzat definiált. (b) a $C^T AB$ szorzat definiált.
 (c) az $ABE_3 C^T$ szorzat definiált. (d) a $BA^T C^T$ szorzat definiált.

MEGOLDÁS. (b)

1.10. Feladat. Legyenek adottak az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ és $C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ mátrixok. Ekkor ...

- (a) az $ABC = CAB$ egyenlőség teljesül. (b) az $(AB)C = A(BC)$ egyenlőség teljesül.
 (c) az $AB + BC$ összeg definiált. (d) a $BCAB$ szorzat nem definiált.

MEGOLDÁS. (b)

1.11. Feladat. Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$), $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ ($k, \ell \in \mathbb{N}$) és

- (a) $n = k$, akkor $A + B$ létezik. (b) $m = n = k = \ell$, akkor $AB = BA$.
 (c) $m = n = k = \ell$, akkor $AB - (BA)^T$ létezik. (d) $m = n = k = \ell$, akkor $(B + A)^T = AB$.

MEGOLDÁS. (c)

1.12. Feladat. Mely mátrixokra teljesül az $A(B + C) = AB + AC$ egyenlőség?

- (a) $A \in \mathbb{R}^{2000 \times 2018}$, $B \in \mathbb{R}^{2018 \times 2021}$ és $C \in \mathbb{R}^{2018 \times 2021}$.
 (b) $A \in \mathbb{R}^{2004 \times 2012}$, $B \in \mathbb{R}^{2012 \times 2016}$ és $C \in \mathbb{R}^{2016 \times 2020}$.
 (c) $A \in \mathbb{R}^{10 \times 1000}$, $B \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ és $C \in \mathbb{R}^{100 \times 10}$.
 (d) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ és $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$.

MEGOLDÁS. (a)

1.13. Feladat. Az $A \in \mathbb{R}^{2018 \times 2019}$ mátrixra $(A^T)^T = A$ teljesül. Ekkor ...

- (a) $A + A^T = 2A$.
 (b) A felülről trianguláris.
 (c) A szimmetrikus.
 (d) A^2 nem definiált.

MEGOLDÁS. (d)

1.14. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A trianguláris
 (b) $AB = (A^T + B^T)^T$.
 (c) A és B felcserélhető.
 (d) $A^T = B$.

MEGOLDÁS. (c)

1.15. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A vagy B az egységmátrix.
 (b) A vagy B a zérusmátrix.
 (c) $AB = (AB)^T$.
 (d) $AB = (A^T B^T)^T$.

MEGOLDÁS. (d)

1.16. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A vagy B az egységmátrix.
 (b) A vagy B négyzetes.
 (c) A vagy B diagonális.
 (d) A vagy B a zérusmátrix.

MEGOLDÁS. (b)

1.17. Feladat. Az $(E_5)^k$ mátrix milyen k -ra ($k \in \mathbb{N}$) lesz diagonális?

- (a) Csak alsó trianguláris lesz bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.
 (b) Csak $k \in \{1, 2\}$ esetén.
 (c) Csak $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén.
 (d) Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.

MEGOLDÁS. (d)

[■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

1.18. Feladat. Elemezzük az $(AB)^3 = A^3 B^3$ egyenlőséget értelmezhetőség szempontjából.

- (a) Előfordulhat-e, hogy az egyenlőség egyik oldala létezik, de a másik oldal nem?
 (b) Előfordulhat-e, hogy mindkét oldal létezik, de különböző méretűek?

1.19. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A -val, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

1.20. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan (2×2) -es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

1.21. Feladat. Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki az alábbi mátrixokat:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$; (b) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

1.22. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$ -es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 1. Ha v $(n \times 1)$ -es oszlopvektor, akkor jelöljük $\|v\|$ -vel v elemeinek az összegét. Igazoljuk, hogy bármely v $(n \times 1)$ -es oszlopvektorra $\|Av\| = \|v\|$ teljesül.

1.23. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$ -es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 0. Igazoljuk, hogy van olyan v $(n \times 1)$ -es oszlopvektor, melyre $Av = 0$ teljesül.

1.24. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük a főátlójában lévő elemek összegét (jele: $\text{Trace}(A)$). Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA)$.

1.25. Feladat. Legyen A valós mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix nyoma 0. Határozzuk meg A -t.

1.26. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A és B $(n \times n)$ -es mátrixok esetén $(n \in \mathbb{N})$?

(a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; (b) $(AB)^T = A^T B^T$; (c) $A^s A^t = A^{st}$ ($s, t \in \mathbb{N}$).
