

2. feladatsor – Polinomok

MEGOLDÁSOK

2.1. Feladat megoldása. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója (asszociáltság erejéig) a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x + 1$;
- (b) $x^2 + \bar{1}$
- (c) $x^2 + 2x + 1$;
- (d) $x^2 + 6x - 7$;
- (e) $x^3 + x^2 + \bar{2}$
- (f) $\bar{2}x^2 + \bar{1}$.

2.2. Feladat megoldása. Az egyenletek megoldása.

- (a) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x + (x + 5)t$, $v = \frac{1}{4}x - (x + 1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;
- (b) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2 + x + 1$,
általános: $u = x + (x^2 + 1)t$, $v = x^2 + x + 1 + (x^3 + x^2 + 1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) Egy megoldás: $u_0 = 3x$, $v_0 = 2x^2 + 3x$,
általános: $u = 3x + (3x^2 + 3x + 3)t$, $v = 2x^2 + 3x + (2x^3 + 2)t$,
 $t \in \mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x$,
általános: $u = 1 + (x + 2)t$, $v = 2x + (2x^2 + x + 2)t$, $t \in \mathbb{Z}_3[x]$.

2.3. Feladat megoldása. Az f és a g racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

- (a) $\text{lko}(f, g) = x^2 + 2x + 1$, közös gyök: -1 ,
 $f = (x + 1)^2(x - 3)$, $g = (x + 1)^2(x - 1)(x + 2)$;
- (b) $\text{lko}(f, g) = x^2 - 4$, közös gyökök: 2 , -2 ,
 $f = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)$, $g = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 3)$.

2.4. Feladat megoldása. Az együtthatók értéke:

- (a) $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{13}{2}$;
- (b) $a = -1$, $b = 4$;
- (c) $a = -\frac{7}{18}$, $b = \frac{23}{18}$;
- (d) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

2.5. Feladat megoldása. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

- (a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
- (b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
- (c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
- (d) háromszoros; $(x - \bar{2})^3(x + \bar{2})$.

2.6. Feladat megoldása. A polinomok komplex gyökei:

- (a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;
- (b) 2 , $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$;
- (c) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$, $\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$;
- (d) 2 , $1 + \sqrt{3}i$, $-1 + \sqrt{3}i$, -2 , $-1 - \sqrt{3}i$, $1 - \sqrt{3}i$;

- (e) $2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$;
 (f) $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

2.7. Feladat megoldása. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x(x^2+3)(x^2-2)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $x(x^2+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
 (b) $(x-2)(x^2+2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett),
 $(x-2)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);
 (c) $x^2(x+2)(x^2-2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett),
 $x^2(x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$ ($\mathbb{C}$ felett);
 (d) $(x^2+5)(x^2-5)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x^2+5)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-i\sqrt{5})(x+i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
 (e) $(x^2-3)(x^4+3x^2+9)$ ($\mathbb{Q}$ felett),
 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x-\frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
 (f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett),
 $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett).

2.8. Feladat megoldása. Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összege (o) és szorzata (sz).

- (a) $o = 3, sz = -4$;
 (b) $o = 0, sz = 2$;
 (c) $o = -2, sz = 0$;
 (d) $o = 0, sz = -5$;
 (e) $o = \frac{4}{3}, sz = -\frac{2}{3}$;
 (f) $o = -\frac{3}{4}, sz = \frac{1}{4}$.

2.9. Feladat megoldása. Egy minimális fokszámú valós együthetős polinom:

- (a) $(x-2)^2(x+1)(x-(2+i))(x-(2-i)) = (x-2)^2(x+1)(x^2-4x+5)$;
 (b) $(x-i)^3(x+i)^3(x-(3+i))(x-(3-i)) = (x^2+1)^3(x^2-6x+10)$;
 (c) $(x-(1+i))^3(x-(1-i))^3(x+2)^2(x-i)(x+i) =$
 $= (x^2-2x+2)^3(x+2)^2(x^2+1)$.

2.10. Feladat megoldása. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) Rac. gyök: 2, $(x-2)(x^2+x+1)$;
 (b) Rac. gyök: 1, -2, $(x+1)(x-2)(x^2+1)^2$;
 (c) Rac. gyök: 1/2, $(x^2+1)(x^2-2)(2x-1)$;
 (d) Rac. gyök: 1, -1/2, $2(x-1)(2x+1)(x^2+2x+2)$.

2.11. Feladat megoldása. Az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 3$;
 (b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 2$ vagy $p = 5$;
 (c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.

2.12. Feladat megoldása.

- (a) x^2 ;
 (b) $-x^2+8x-4$;

- (c) $x^2 + 3x - 4$;
- (d) $-\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$.

2.13. Feladat megoldása. Az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értéke:

- (a) $a = -2, b = 3$;
- (b) $a = 2, b = 4$;
- (c) $a = 3, b = 1$.

2.14. Feladat megoldása. A többszörös gyökök:

- (a) $2, -1$;
- (b) -1 .

2.15. Feladat megoldása. $T[x]/\langle m \rangle$ testet alkot-e.

- (a) igen, 4-elemű test;
- (b) nem ($\bar{1}$ gyöke m -nek), 4-elemű gyűrű;
- (c) igen, 9-elemű test;
- (d) nem ($\bar{2}$ gyöke m -nek), 27-elemű gyűrű;
- (e) igen, 27-elemű test;
- (f) igen, 16-elemű test;
- (g) nem ($x^2 + x + \bar{1}$ négyzete m).

2.16. Feladat megoldása.

- (a) szorzat: $\bar{7}$, inverz: $\bar{6}$;
- (b) összeg: $\overline{x^2}$, szorzat: $\overline{2x}$, inverz: $\overline{2x^2 + x + \bar{1}}$;
- (c) szorzat: $\overline{x^3 + x^2}$, inverz: $\overline{x}$;
- (d) szorzat: $\overline{2x^2 + 2}$, inverz: $\overline{2x}$.

2.17. Feladat megoldása.

- (a) $x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$;
- (b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

2.18. Feladat megoldása. Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek köbösszege (k), számtani (sz), mértani (m), harmonikus (h) és négyzetes (n) közepe.

- (a) $k = 10, sz = -1, m = \pm\sqrt{3}, h = -3, n = \pm i$;
- (b) $k = 40, sz = 2, m = \pm\sqrt{2}, h = 1, n = \pm\sqrt{31}$;
- (c) $k = -48, sz = -1, m = \sqrt[3]{5}, -\frac{\sqrt[3]{5}}{2} \pm i\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{3}}{2}, h = -\frac{15}{4}, n = \pm\frac{\sqrt{51}}{3}$;
- (d) $k = -4, sz = \frac{2}{3}, m = -\sqrt[3]{4}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \pm i\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}, h$ nincs értelmezve, $n = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.19. Feladat megoldása.

- (a) $x^9 - 5$;
- (b) $x^2 + 16$;
- (c) $x^2 - 4x + 1$;
- (d) $x^3 + 9x^2 + 27x + 3$;
- (e) $x^2 - 8x + 25$;
- (f) nincs, α nem algebrai szám;
- (g) $x^2 - 6x + 34$;
- (h) nincs, α nem algebrai szám.

2.20. Feladat megoldása. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

- (a) $\sqrt[3]{-38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{-38 - 17\sqrt{5}} = -4, \quad 2 + \sqrt{15}i, \quad 2 - \sqrt{15}i$;

- (b) casus ired. $(-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -2$, $1 - 2\sqrt{3}$, $1 + 2\sqrt{3}$;
- (c) $y = x + 3$ helyettesítéssel $-x^3 - 6x + 20$, ami az előadásjegyzetben szerepel;
- (d) $1 \pm \sqrt{3\sqrt{2} - 3}i$, $1 \pm \sqrt{-1 + 3\sqrt{2}}$.