

2. feladatsor – Polinomok

2.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1}$, $g = x^4 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3$, $g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (d) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105$, $g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (e) $f = x^5 + x + \bar{2}$, $g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_3[x]$;
- (f) $f = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + x + \bar{2}$, $g = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

2.2. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x$, $\mathbb{R}[x]$;
- (b) $(x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1})u + (x^4 + \bar{1})v = x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $(x^4 + x^3 + x + \bar{1})u + (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^2 + x$, $\mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) $(x^5 + x + \bar{2})u + (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^3 + x^2 + \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

2.3. Feladat. Határozzuk meg az f és a g racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyökét.

- (a) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3$, $g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$;
- (b) $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$, $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$.

2.4. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x - 1)(x + 2) \mid ax^3 + x^2 + bx + 3$;
- (b) $(x - 2)(x + 1) \mid ax^3 - x^2 + bx + 4$;
- (c) $(x - 2)(x - 3) \mid ax^3 + bx^2 + x - 4$;
- (d) $(x + 1)(x + 2) \mid x^3 + ax^2 + bx - 1$.

2.5. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

- (a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, $c = 3$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$, $c = 3$, $\mathbb{R}[x]$;
- (c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i$, $c = i$, $\mathbb{C}[x]$;
- (d) $f = x^4 + \bar{2}x^3 + x + \bar{2}$, $c = \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

2.6. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

- (a) $x^4 + 16$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^4 - i$;
- (d) $x^6 - 64$;
- (e) $x^3 + 8i$;

(f) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

2.7. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x^5 + x^3 - 6x$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^5 + 8x^2$;
- (d) $x^4 - 25$;
- (e) $x^6 - 27$;
- (f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

2.8. Feladat. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összegét és szorzatát. (Minden gyököt a multiplicitásának megfelelő számban vegyünk figyelembe.)

- (a) $f = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 4$;
- (b) $f = x^4 + 2x^2 - 3x + 2$;
- (c) $f = x^{17} + 2x^{16} + 3x^5 - 4x^2 + 15x$;
- (d) $f = x^{2021} + x^4 + 3x^2 - x + 5$;
- (e) $f = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 6x + 2$;
- (f) $f = 8x^7 + 6x^6 - 2x^3 + 7x - 2$.

2.9. Feladat. Adjunk meg minimális fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek

- (a) a 2 kétszeres, a -1 és a $2 + i$ egyszeres gyöke;
- (b) az i háromszoros, a $3 + i$ egyszeres gyöke;
- (c) az $1 + i$ háromszoros, a -2 kétszeres, az i egyszeres gyöke.

2.10. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
- (b) $f = x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$;
- (c) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;
- (d) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

2.11. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
- (b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
- (c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.

2.12. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

- (a) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$;
- (b) $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$;
- (c) $A(-2, -6)$, $B(1, 0)$, $C(3, 14)$;
- (d) $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 4)$, $D(4, 0)$.

2.13. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x-1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 2$;
- (b) $(x+1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 3$;
- (c) $(x+2)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 4$.

2.14. Feladat. Keressük meg a következő polinomok többszörös gyökeit.

- (a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
- (b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

2.15. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti m polinom esetén $T[x]/\langle m \rangle$ testet alkot-e. Mennyi az elemszáma?

- (a) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^2 + x + \bar{1}$;
- (b) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^2 + \bar{1}$;
- (c) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^2 + \bar{1}$;
- (d) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}$;
- (e) $T = \mathbb{Z}_3$, $m = x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$;
- (f) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^4 + x^3 + \bar{1}$;
- (g) $T = \mathbb{Z}_2$, $m = x^4 + x^2 + \bar{1}$.

2.16. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a K véges testekben.

- (a) $K = \mathbb{Z}_{17}$; $\bar{16} \cdot \bar{10}$, $\bar{3}^{-1}$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{2} \rangle$; $\overline{x + \bar{2} + x^2 + \bar{2}x + \bar{1}}$, $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x + \bar{2}}$, $\overline{x + \bar{2}}^{-1}$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + \bar{1} \rangle$; $\overline{x^3 + x + \bar{1} \cdot x^2 + \bar{1}}$, $\overline{x^3 + x^2}^{-1}$;
- (d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{1} \rangle$; $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x^2 + \bar{2}}$, $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1}}^{-1}$.

2.17. Feladat. Adjuk meg a g polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

- (a) $g = x_1^3 + x_2^3$;
- (b) $g = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

2.18. Feladat. Anélkül, hogy meghatároznánk a gyököket, adjuk meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint gyökeinek általánosított számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepét.

- (a) $f = x^2 + 2x + 3$;
- (b) $f = 2x^2 - 8x + 4$;
- (c) $f = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$;
- (d) $f = -3x^3 + 6x^2 - 12$.

2.19. Feladat. Határozzuk meg az α komplex szám minimálpolinomját.

- (a) $\alpha = \sqrt[9]{5}$;
- (b) $\alpha = -4i$;
- (c) $\alpha = \sqrt{3} + 2$;

- (d) $\alpha = 2\sqrt[3]{3} - 3$;
- (e) $\alpha = 4 + 3i$;
- (f) $\alpha = 5\sqrt{7}$;
- (g) $\alpha = 3 - 5i$;
- (h) $\alpha = 2\pi + 3$.

2.20. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

- (a) $x^3 + 3x + 76 = 0$;
- (b) $x^3 = 15x + 22$;
- (c) $-y^3 + 9y^2 - 33y + 65 = 0$;
- (d) $x^4 - 4x^3 + 8x - 14 = 0$.

Szorgalmi feladatok

2.1. Szorg. feladat. Adjuk meg azokat az $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomokat, amelyeknek legnagyobb közös osztója $x + \bar{1}$, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 3 maradékos osztást végeztünk, és minden hányados x volt.

2.2. Szorg. feladat. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomokra, amelyre $\text{lko}(f, g) = x^2 + 1$, és a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 4 maradékos osztást végeztünk, azaz a 3. osztásnál kaptuk a legutolsó nemnulla maradékot. Igazoljuk is!

2.3. Szorg. feladat. Adjuk meg az $a \in \mathbb{C}$ értékét úgy, hogy az $x^3 - (a + 1)x + 2$ és az $x^2 - ax + 1$ komplex együtthatós polinomoknak legyen közös gyöke.

2.4. Szorg. feladat. Határozzuk meg az $x^n - 1$ és az $x^m - 1$ komplex együtthatós polinomok legnagyobb közös osztóját tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

2.5. Szorg. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + x + 1 \mid x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ teljesül $\mathbb{C}[x]$ -ben tetszőleges $k, m, n \in \mathbb{N}$ esetén.

2.6. Szorg. feladat. Mely n pozitív egészekre osztható az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinommal?

2.7. Szorg. feladat. Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 2x + p$ polinomnak?

2.8. Szorg. feladat. Határozzuk meg az $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ n -ed fokú nem konstans polinom gyökeinek négyzetösszegét a polinom együtthatóinak segítségével.

2.9. Szorg. feladat. Számítsuk ki az $(x - \bar{1})(x - \bar{2}) \cdots (x - \overline{p-1}) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x^{p-1} , x^{p-2} és x^0 együtthatóját, ahol $p \geq 5$ prímszám.

2.10. Szorg. feladat. Legyen f a $(k, (-1)^k)$, $k = 0, \dots, 9$ pontokra illesztett interpolációs polinom. Mennyi $f(10)$ értéke?

2.11. Szorg. feladat. Adjuk meg az a, b együtthatókat úgy, hogy $(x - 1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön.

2.12. Szorg. feladat. Adjuk meg az összes olyan $a \in \mathbb{C}$ együtthatót, amely esetén az $x^4 - 4x + a \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke.

2.13. Szorg. feladat. Legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ tetszőleges polinom. Hogyan lehet meghatározni azt a polinomot, amelynek gyökei pontosan az f polinom többszörös gyökei, csak mindegyik egyszeres multiplicitással.

2.14. Szorg. feladat. Legyenek a $2x^3 - 6x^2 + 4x + 2$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. A gyökök kiszámítása nélkül határozzuk meg az $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$ értékét. (Segítség: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2 \sigma_2 + C \cdot \sigma_1 \sigma_3 + D \cdot \sigma_2^2$.)

2.15. Szorg. feladat. Határozzuk meg a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ szám minimálpolinomját.