

1. feladatsor – Logika

1.1. Ítéletkalkulus

1.1. Feladat megoldása.

- (a) $B \vee C$
- (b) $B \wedge (\neg C)$
- (c) $\neg A$
- (d) $B \rightarrow C$
- (e) $B \leftrightarrow A$

1.2. Feladat megoldása.

8 darab részformula van: $A, B, C, \neg B, \neg C, (\neg C) \rightarrow B, A \vee (\neg B), (A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$

1.3. Feladat megoldása. (c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

1.4. Feladat megoldása.

- (a) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
- (b) $A \rightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (c) $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$
- (d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
- (f) $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
- (g) $A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$
- (h) $A \rightarrow (\neg B \wedge (\neg C \rightarrow \neg D))$
- (i) $A \vee (B \wedge C)$
- (j) $A \wedge (B \rightarrow \neg C)$

1.5. Feladat megoldása.

- (a) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$, az ítélet hamis.
- (b) $(A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow (\neg D \vee E))$, az ítélet igaz.
- (c) $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow (D \vee E))$, az ítélet hamis.

1.6. Feladat megoldása. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

(a)

$$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

i	i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	i	h	h	i	h	i	h	h
i	h	h	i	i	i	i	h	i	i
i	h	h	i	h	i	i	h	i	h
h	h	i	i	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	h	h	i	i	h	h
h	h	h	i	i	h	i	h	i	i
h	h	h	i	h	h	i	h	i	h

A többi feladatot is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanazt a logikai értéket kapjuk-e.

1.7. Feladat megoldása.

- | | |
|--------------------|----------------|
| (a) Nem tautológia | (e) Tautológia |
| (b) Tautológia | (f) Tautológia |
| (c) Nem tautológia | (g) Tautológia |
| (d) Tautológia | |

1.8. Feladat megoldása.

- (a) $B \rightarrow A$, tagadás: $(\neg A) \wedge B$.
- (b) $(A \wedge B) \rightarrow C$, tagadás: $A \wedge B \wedge (\neg C)$.
- (c) A , tagadása: $\neg A$.
- (d) $(\neg A) \leftrightarrow B$, tagadása: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$.

1.2. Predikátumkalkulus

1.9. Feladat megoldása.

- (a) A 7 páros szám.
- (b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
- (c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
- (d) A 6-nak létezik páros osztója.
- (e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
- (f) Két egész szám összege pontosan akkor páros, ha a szorzatuk is az.
- (g) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
- (h) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha legalább az egyik páratlan.
- (i) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

1.10. Feladat megoldása. A teljes megoldáshoz az indoklás is kell!

- (a) igaz
- (b) hamis
- (c) hamis
- (d) hamis
- (e) igaz
- (f) hamis
- (g) igaz
- (h) igaz
- (i) hamis
- (j) igaz
- (k) igaz
- (l) hamis

1.11. Feladat megoldása.

Pirossal jelölve a **kötött előfordulás**, zölddel a **szabad előfordulás**.

- (a) $(\forall x)(K(\textcolor{red}{x}, y) \vee L(\textcolor{red}{x}))$
- (b) $(\exists y)(I(s(\textcolor{red}{x}, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(\textcolor{red}{x}, y)))$
- (c) $M(k(\textcolor{red}{x}, b), \textcolor{red}{x}) \wedge (\exists z)(M(y, k(\textcolor{red}{z}, a)))$
- (d) $(\forall x) P(f(\textcolor{red}{x}, a), \textcolor{red}{x}) \rightarrow (\exists y) (P(f(y, \textcolor{red}{x}), y) \wedge Q(\textcolor{red}{x}))$

1.12. Feladat megoldása.

- (a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
- (b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
- (c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y, x))$
- (d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y, x) \rightarrow C(y, x)))$
- (e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y, x)))$
- (f) $(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg F(x)) \wedge (\exists x)(\neg F(x) \wedge \neg A(x))$
- (g) $(\forall x)(B(x, p) \rightarrow H(x))$
- (h) $(\exists x)(H(x) \wedge (\neg S(a(x))))$
- (i) $S(a(p))$

1.13. Feladat megoldása.

Predikátumok: $O(x, y)$: „ x osztója y -nak”, $F(x)$: „ x felbonthatatlan szám”, $R(x)$: „ x prímszám”, $E(x)$: „ x egység”, $N(x)$: „ x nullára végződik”, $P(x)$: „ x pozitív”, $K(x, y)$: „ x kisebb y -nál”.

Függvények: $e(x)$: „ x ellentetje”, $f(x)$: „ x négyzete”.

- (a) $(\forall x)O(x, 0)$
 $\neg(\forall x)O(x, 0) \equiv (\exists x)\neg O(x, 0)$
- (b) $(O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c)$
 $\neg((O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c)) \equiv \neg(\neg(O(a, b) \wedge O(b, c)) \vee O(a, c)) \equiv$
 $\equiv O(a, b) \wedge O(b, c) \wedge \neg O(a, c)$
- (c) $(\forall x)(O(x, e(x)) \wedge O(e(x), x))$
 $\neg(\forall x)(O(x, e(x)) \wedge O(e(x), x)) \equiv (\exists x)(\neg O(x, e(x)) \vee \neg O(e(x), x)) \equiv (\exists x)(O(x, e(x)) \rightarrow$
 $\neg O(e(x), x))$
- (d) $P(x) \rightarrow F(x)$
 $\neg(P(x) \rightarrow F(x)) \equiv \neg(\neg P(x) \vee F(x)) \equiv P(x) \wedge \neg F(x)$
- (e) $E(x) \leftrightarrow (\forall y)O(x, y)$
 $\neg(E(x) \leftrightarrow (\forall y)O(x, y)) \equiv \neg((\neg E(x) \vee (\forall y)O(x, y)) \wedge (\neg(\forall y)O(x, y) \vee E(x))) \equiv (E(x) \wedge$
 $\neg(\forall y)O(x, y)) \vee ((\forall y)O(x, y) \wedge \neg E(x)) \equiv (E(x) \wedge (\exists y)\neg O(x, y)) \vee ((\forall y)O(x, y) \wedge \neg E(x))$
- (f) $(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))$
 $\neg[(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))] \equiv (\exists x)(\neg O(1, x) \vee \neg O(x, x))$
- (g) $(\forall x)(\exists y)K(y, x)$
 $\neg[(\forall x)(\exists y)K(y, x)] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y, x)$
- (h) $(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))$
 $\neg[(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))] \equiv (\exists x)(O(10, x) \wedge \neg N(x))$
- (i) $(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))$
 $\neg[(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))] \equiv (\forall x)(\neg K(x, 0) \vee \neg P(f(x)))$

- (j) $(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))$
 $\neg[(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x, 0))$

1.14. Feladat megoldása.

Individuumkonstansok: m : „Mézga Géza”.

Predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”; $E(x)$: „ x éhes”; $S(x)$: „ x szakács”; $K(x, y)$: „ x kedveli y -t”; $F(x, y)$: „ x főz y -nak”; $Sz(x)$: „ x szerencsés”; $G(x, y)$: „ x gyermeke y -nak”.

Függvények: $g(x)$: „ x gyereke”.

- (a) $(\forall x)(I(x) \rightarrow E(x))$
 Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
- (b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \rightarrow F(x, x))$,
 Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x, x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
- (c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \rightarrow (\forall y)(S(y) \rightarrow K(x, y)))$,
 Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x, y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
- (d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x, y) \rightarrow I(y)))$,
 Tagadása: $(\forall x)(S(x) \rightarrow (\exists y)(F(x, y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
- (e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y)) \rightarrow K(x, y))$,
 Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x, y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
- (f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x, m) \rightarrow Sz(x))$,
 Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x, m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
- (g) $(S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x)) \rightarrow (\forall x) Sz(x)$,
 Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x) \wedge (\exists x) \neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*