

## 1. feladatsor – Logika

### 1.1. Ítéletkalkulus

**1.1. Feladat.** Formalizáljuk az alábbi állításokat a megadott primitívek felhasználásával:

$A$  : „Süt a nap.”       $B$  : „Kimegyek az uszodába.”       $C$  : „Hamburgert ebédelek.”

- (a) Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.
- (b) Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.
- (c) Nem süt a nap.
- (d) Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.
- (e) Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

**1.2. Feladat.** Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját.

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$$

**1.3. Feladat.** Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{ll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C) \\ (c) & A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (b) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C) \\ (d) & A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \end{array}$$

formulák közül — a primitívek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

*Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.*

**1.4. Feladat.** A primitívek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

- (a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
- (b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
- (c) *Ha esik az eső, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
- (d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
- (e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
- (f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld vagy az asztal lekváros lesz.*
- (g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
- (h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
- (i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
- (j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*

**1.5. Feladat.** Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a primitívek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A primitívek ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük  $A, B, C, \dots$  betűkkel.)

- (a) *Ha nem fáj a lábam, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.*  $A : h, B : h, C : i, D : h$ .
- (b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.*  
 $A : i, B : h, C : i, D : h, E : i$ .
- (c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.*  $A : i, B : i, C : i, D : h, E : h$ .

**1.6. Feladat.** Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

- (a)  $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ;
- (b)  $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$ ;
- (c)  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C$ ;
- (d)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B)$ ;
- (e)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A$ ;
- (f)  $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$ .

**1.7. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

- (a)  $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg A)))$ ;
- (b)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ ;
- (c)  $A \rightarrow (A \wedge B)$ ;
- (d)  $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$ ;
- (e)  $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$ ;
- (f)  $(B \vee (\neg A)) \rightarrow (B \vee (\neg A))$ ;
- (g)  $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge A)$ .

**1.8. Feladat.** A primitívek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását úgy, hogy negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon.

- (a) *A 3 felbonthatatlan szám, ha a 3 prímszám.*
- (b) *Ha 2 osztója 4-nek, és 4 osztója 1-nek, akkor 2 osztója 1-nek.*
- (c) *A 4 és a -4 osztói egymásnak.*
- (d) *A 2-t pontosan akkor nem nevezzük egységnek, ha a 2 minden egész számnak osztója.*

## 1.2. Predikátumkalkulus

**1.9. Feladat.** Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:
  - $M(x)$ : „ $x$  négyzetszám”,
  - $P(x)$ : „ $x$  páros szám”,
  - $N(x)$ : „ $x$  negatív szám”.
- kétváltozós predikátum:

- $O(x, y)$ : „ $x$  osztója  $y$ -nak”,
- kétváltozós függvény(jel)ek
  - $o(a, b) = a + b$ , azaz  $a$  és  $b$  szokásos összege
  - $s(a, b) = a \cdot b$ , azaz  $a$  és  $b$  szokásos szorzata

Fordítsuk köznapra nyelvre az alábbi formulákat.

- (a)  $P(7)$
- (b)  $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$
- (c)  $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$
- (d)  $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$
- (e)  $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$
- (f)  $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$
- (g)  $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y)))$
- (h)  $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$
- (i)  $(\exists x)\left(P(x) \wedge (\forall y)\left((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))\right)\right)$

**1.10. Feladat.** Legyen az individuumtartomány az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz és legyen  $f$  az az egyváltozós függvényjel  $A$ -n, melyre

$$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y) : x + y = 5; \quad Q(x) : x \text{ páros}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- (a)  $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$ ,
- (b)  $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$ ,
- (c)  $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$ ,
- (d)  $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$ ,
- (e)  $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$ ,
- (f)  $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$ ,
- (g)  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
- (h)  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$
- (i)  $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$
- (j)  $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$ ,
- (k)  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$ ,
- (l)  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ .

**1.11. Feladat.** A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül  $x, y$  és  $z$  változókat;  $a, b, c$  individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a)  $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$

- (b)  $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$
- (c)  $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$
- (d)  $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x)).$

**1.12. Feladat.** Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

|                                         |                                           |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------|
| $H(x)$ : „ $x$ hallgató”,               | $V(x)$ : „ $x$ felkészült a vizsgára”,    |
| $B(x, y)$ : „ $x$ az $y$ barátja”,      | $C(x, y)$ : „ $x$ csoporttársa $y$ -nak”, |
| $T(x, y)$ : „ $x$ házastársa $y$ -nak”, | $F(x)$ : „ $x$ férfi”,                    |
| $A(x)$ : „ $x$ anya”,                   | $p$ : „Péter”,                            |
| $a(x)$ : „ $x$ anyja”,                  | $S(x)$ : „ $x$ szeret főzni”.             |

- (a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
- (b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
- (c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
- (d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
- (e) *Vannak nőtlen férfiak.*
- (f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
- (g) *Péter összes barátja hallgató.*
- (h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
- (i) *Péter anyja szeret főzni.*

**1.13. Feladat.** Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) *Minden egész szám osztója a 0-nak.*
- (b) *Ha  $a$  osztója  $b$ -nek, és  $b$  osztója  $c$ -nek, akkor  $a$  osztója  $c$ -nek.*
- (c) *Minden egész szám és ellentettje osztói egymásnak.*
- (d) *Egy egész szám felbonthatatlan szám, ha prímszám.*
- (e) *Egy egész számot pontosan akkor nevezünk egységnek, ha minden egész számnak osztója.*
- (f) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
- (g) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
- (h) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*
- (i) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
- (j) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

**1.14. Feladat.** Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) *Minden informatikus éhes.*
- (b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
- (c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
- (d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
- (e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*

- (f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*  
 (g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

## Szorgalmi feladatok

**1.15. Feladat.** Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az  $\rightarrow$  és  $\leftrightarrow$  műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

| $A$ | $B$ | $?$ |
|-----|-----|-----|
| $i$ | $i$ | $i$ |
| $i$ | $h$ | $i$ |
| $h$ | $i$ | $i$ |
| $h$ | $h$ | $h$ |

**1.16. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy egy  $n$  logikai műveletet tartalmazó ítéletkalkulusbeli formulának legfeljebb  $2n + 1$  részformulája van.

**1.17. Feladat.** Egy teniszmagazin a következő szlogennel hirdeti magát: „Ha nem teniszezem, akkor teniszt nézek. És ha nem nézek teniszt, akkor teniszről olvasok.” Feltehetjük, hogy az elbeszélő nem tud a felsoroltak közül több dolgot végezni egyszerre. Ha az állítás igaz, mit csinálhat?

**1.18. Feladat.** Predikátumkalkulusban formalizáljuk a következő ítéletet:

*Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.*

**1.19. Feladat.** Legyen  $E(x, y) : x = y$ , az  $f$  2-változós függvényjel,  $e$  pedig individuum konstans. Tekintsük az  $F$  és  $G$  predikátumkalkulusbeli formulákat

$$F = (\forall x)(\exists y)E(f(x, y), e), \quad G = (\exists y)(\forall x)E(f(x, y), e).$$

Igazoljuk, hogy az  $F$  és  $G$  formulák nem ekvivalensek.