

Tiszta vs. kevert tétel (bizonyítással)

(előadásjegyzet, 2026. március 27.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Jelölés. A_i : az A mátrix i . sorvektora, A_j : az A mátrix j . oszlopvektora.

2. Tétel (Tiszta vs. kevert tétel). Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha

$$A_i \cdot Y^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha

$$X^* A_j > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.

Mivel Y^* a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az i -edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, az optimális stratégia definíciója alapján nyereménye kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:

$$A_i \cdot Y^* \leq v, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jelölje R, J a következő index halmazokat:

$$R = \{i : A_i \cdot Y^* < v\}, \quad J = \{i : A_i \cdot Y^* = v\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} v &= X^* A Y^* = \sum_{i=1}^m x_i^* A_i \cdot Y^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^* + \sum_{i \in J} x_i^* A_i \cdot Y^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^* + \sum_{i \in J} x_i^* v. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} v - \sum_{i \in J} x_i^* v &= \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^*, \\ v \left(1 - \sum_{i \in J} x_i^* \right) &= \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^*. \end{aligned}$$

Mivel X^* komponensei valószínűségeket jelölnek, így $\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$. Továbbá R és J index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért $1 - \sum_{i \in J} x_i^* = \sum_{i \in R} x_i^*$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$v \sum_{i \in R} x_i^* = \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^* \Rightarrow \sum_{i \in R} (v - A_i \cdot Y^*) x_i^* = 0.$$

Mivel R minden egyes i elemére $v - A_i \cdot Y^* > 0$ ezért szükségképpen ezen i indexekre $x_i^* = 0$. ■

Ismétlés:

3. Megjegyzés. A ?? tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_i \cdot Y^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i . stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i . stratégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan fogalmazható meg a második játékos j . stratégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v -nél többet veszít a játékos.

Az optimális stratégia definíciójából $A_i.Y^* \leq v$ következik. Viszont a ?? tétel alapján $x_i^* > 0$ esetén nem teljesülhet a $<$ egyenlőtlenség, tehát ekkor $A_i.Y^* = v$. Ezt fogalmazza meg az alábbi következmény.

4. Következmény. *Legyen az A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v , továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.*

- (1) *Ha X^* i . komponensére $x_i^* > 0$, akkor $A_i.Y^* = v$.*
- (2) *Ha Y^* j . komponensére $y_j^* > 0$, akkor $X^*A_{.j} = v$.*