

Véges fákkal ábrázolt játékok

1. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1-fokú pontja van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

Megoldás.

- (a) 2 és 18 között bármely egész értéket felvehet.
- (b) 3.
- (c) 9.

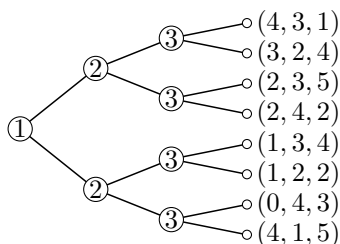
2. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

Megoldás. Egy n pontú fának $n - 1$ éle van, azaz az erdő minden fa-komponensének 1-gyel több pontja van, mint éle, így 21 pont van.

3. Feladat. A síkban adott 14 különböző pont. Andi és Balázs felváltva kötnek össze két különböző pontot egy éllel. A játék kezdetén semelyik két pont sincs összekötve, az első élt Andi rajzolja. Az veszít, aki olyan élt rajzol be, amellyel a gráfban keletkezik kör. Milyen esélye van Andinak, illetve Balázsnak, hogy nyerjen?

Megoldás. Egy n pontú fának $n - 1$ éle van, tehát 13 élt lehet behúzni, anélkül, hogy kört kapnának, az utolsó élt Andi húzza be.

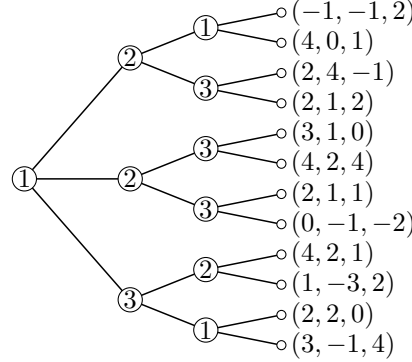
4. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.



Megoldás. (Ld. előadásvázlat.) Az egyensúly a $(2, 3, 5)$.

5. Feladat. Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.

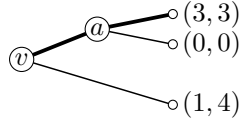
¹Ha a feladat sorszáma mellett az szerepel, hogy *kidolgozott feladat*, akkor a részletes megoldása megtalálható a megfelelő előadás vázlatban.



Megoldás. Figyeljünk, hogy melyik pontban melyik játékos választ. Az egyensúlya a $(4, 2, 4)$.

6. Feladat. Egy áruházlánc ellenőrzése alatt tart egy piacot, amire belép egy vállalkozó. Az áruházláncnak két stratégiája van: engedi, hogy a vállalkozó a piacon maradjon vagy kiszorítja. A vállalkozó stratégiái: megmarad a piacon vagy kilép. Az egyes kifizetések a következők: ha a vállalkozó kilép, akkor az áruházlánc nyeresége 4 egység a vállalkozóé 1 egység. Ha a vállalkozó nem lép ki a piacról, de az áruházlánc utána kiszorítja, akkor nem nyernek semmit, ha nem szorítja ki, akkor mindkét szereplő 3-3 egységet nyer. Adja meg a problémához tartozó véges gyökeres fát, és határozza meg az egyensúlyát.

Megoldás. A vállalkozót jelölje v , az áruházláncot a , ekkor a problémához tartozó véges gyökeres fa:



Az egyensúlyi pont a $(3, 3)$, azaz az a vállalkozó nem lép ki a piacról, és az áruházlánc nem szorítja ki.

A $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixjátékok

7. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Létezik nyeregpont, mivel a sorminimumok maximuma megegyezik az oszlop-maximumok minimumával. Az első játékos a 2. stratégiájával játszik, a második játékos pedig az 1. stratégiával, a játék értéke $v = 2$.

8. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2 -es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, a második optimális stratégiája: $Y^T = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$, a játék értéke $v = \frac{9}{5}$.

9. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2 -es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, a második optimális stratégiája: $Y^T = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, a játék értéke $v = \frac{22}{5}$.

10. Feladat. Andi és Balázs szócsatát játszik. Andi az a , $\tilde{u}$, míg Balázs az r , z , d betűkből választ egyet-egyet egyszerre. Ha Andi olyan értelmes szót tud alkotni a kiválasztott két betűből, ami nem ige, akkor 1 Ft-ot kap Balázstól, ha ige, akkor 5 Ft-ot kap, ha nem tud értelmes szót alkotni, akkor Balázs kap 3 Ft-ot Anditól. Adja meg a játék kifizetési mátrixát. Határozza meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

Megoldás. A játék kifizetési mátrixa:

	r	z	d
a	-3	1	5
$\tilde{u}$	1	5	-3

Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $Y^T = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$. A játék értéke $v = -\frac{1}{3}$.

11. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5 -ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0)$. A játék értéke $v = 3$.

12. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5 -ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{7}, \frac{6}{7})$, $Y^T = (\frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7}, 0, 0)$. A játék értéke $v = \frac{6}{7}$.

13. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $Y^T = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$.

14. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y^T = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

15. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 5×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$, $Y^T = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

A 3×3 -as mátrixjátékok

16. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $v = 0$.

17. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Alakítsa át a mátrixot úgy, hogy egy szimmetrikus mátrixjátékot kapjon. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$, $v = 0$.

18. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás van a sorok és az oszlopok között is (az algoritmus 2. lépése), 2×2 -es mátrixjáték megoldására vezet. $X = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $Y^T = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, $v = \frac{5}{3}$.

19. Feladat. (Kidolgozott feladat.) Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9})$, $v = 4$.

20. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5})$, $Y^T = (\frac{19}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{15})$, $v = \frac{23}{5}$.

21. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 4. lépését alkalmazzuk. Az első játékos 1. stratégiáját elhagyva visszavezethetjük 2×3 -as játékra, az Optimális stratégia tételével ellenőrizzük, hogy az optimális megoldást kaptuk-e. $X = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, $Y^T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $v = \frac{14}{3}$.

Diagonális játékok

22. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 4×4 -es diagonális mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = (\frac{10}{39}, \frac{5}{39}, \frac{4}{39}, \frac{20}{39})$, $v = \frac{20}{39}$.