

Mátrixjátékok

(előadásjegyzet, 2026. március 27.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. ALAPFOGALMAK, TÉTELEK

1. Definíció. A játékoknál az egyes stratégiákhoz tartozó nyereményeket *kifizetési függvények* adják meg, a függvények által megadott valós számokat *kifizetéseknek* nevezzük.

2. Definíció. Egy játéknak a játékosok adott stratégiái esetén (Nash-féle) *egyensúlyi helyzete* van, ha minden játékos esetén teljesül, hogy egyoldalúan változtatva a stratégiáján nem érne el nagyobb kifizetést.

3. Definíció. A játékot *nullaösszegűnek* nevezzük, ha az egyes játékosok nyereménye a többi játékos vesztesége. Azaz, ha az összes játékos kifizetéseit összegezzük, akkor 0-át kapunk.

4. Definíció. Minden véges kétszemélyes nullaösszegű játéknál a stratégiapárokhoz tartozó kifizetéseket táblázatban, azaz mátrixban ábrázolhatjuk, ezért az ilyen típusú játékokat *mátrixjátékoknak* nevezzük.

5. Definíció. Ha egy mátrixjáték esetén az 1. játékosnak m stratégiája van, a 2. játékosnak pedig n , akkor az 1. játékos kifizetéseit egy $m \times n$ -es A valós mátrix elemeiként ábrázolhatjuk. Ezt az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixot nevezzük a *játék kifizetési mátrixának*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i . sorának j . eleme a_{ij} , az az érték, amit az 1. játékos nyer, ha ő az i . stratégiájával játszik, a 2. játékos pedig a j . stratégiájával. Ekkor a 2. játékos kifizetése $-a_{ij}$, ugyanis a játék nullaösszegű. Tehát erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij} -t fizet az 1. játékosnak. Ha $a_{ij} > 0$, akkor erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij} -t fizet az 1. játékosnak.

6. Definíció. Ha a mátrixjáték kifizetési mátrixa A , akkor az A mátrix sorminimumainak maximumát *alsóértéknek*, az oszlopmaximumainak minimumát pedig *felsőértéknek* nevezzük. Az alsóérték kisebb vagy egyenlő a felsőértéknél, ha az egyenlőség teljesül, *nyeregpontnak* nevezzük.

7. Tétel. *Mátrixjátékok bármely két nyeregpontja azonos értékű.*

8. Definíció. Ha a játékos csak az egyik stratégiájával játszik, és a többi nem használja, akkor ezt *tiszta stratégiának* nevezzük, különben *kevert stratégiának*.

Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Az 1. játékos stratégiáinak S_1 halmaza az összes olyan m -komponensű $X = (x_1, \dots, x_m)$ vektor, amelyre $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) és $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. A 2. játékos esetén pedig az n -komponensű $Y^T = (y_1, \dots, y_n)$ vektorok halmaza, amelyre $y_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) és $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Azaz az 1. játékos x_i valószínűséggel játsza az i . stratégiáját, és a 2. játékos y_j valószínűséggel a j . stratégiáját. Ekkor az 1. játékos várható kifizetése:

$$XAY = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

9. Definíció. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. A mátrixjátéknak $X^* \in S_1$ és $Y^* \in S_2$ *egyensúlyi helyzete* (optimális stratégiája), ha

$$XAY^* \leq X^*AY^* \leq X^*AY,$$

tetszőleges $X \in S_1$, $Y \in S_2$ esetén. Azaz egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni, az 1. játékos nem nyerne többet, a 2. játékos pedig nem veszítene kevesebbet, ha az egyensúlyi helyzettől eltérne.

10. Definíció. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és X^* , Y^* optimális stratégiája, ekkor a $v = X^*AY^*$ egyensúlyi helyzetben elért várható kifizetést a *játék értékének* nevezzük.

11. Jelölés. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrix, ekkor jelölje A_i az A mátrix i . sorvektorát, ahol $i \in \{1, \dots, m\}$. A_j pedig jelölje az A mátrix j . oszlopvektorát tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

12. Megjegyzés. Ha A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az XA_j a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j . tiszta stratégiát. Hasonlóan az A_iY kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i . tiszta stratégiát. Továbbá, ha $X^* \in S_1$, $Y^* \in S_2$ a játék egyensúlyi helyzete, és v a játék értéke, akkor a 9. és a 10. Definíció alapján $A_iY^* \leq v$ és $v \leq X^*A_j$ teljesül minden $j = 1, 2, \dots, n$ és $i = 1, 2, \dots, m$ esetén.

13. Tétel (Tiszta vs. kevert tétel). Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha

$$A_iY^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha

$$X^*A_j > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.

Mivel Y^* a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az i -edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, a nyeresége kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:

$$A_iY^* \leq v, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jelölje R, J a következő index halmazokat:

$$R = \{i : A_iY^* < v\}, \quad J = \{i : A_iY^* = v\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} v &= X^*AY^* = \sum_{i=1}^m x_i^* A_iY^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_iY^* + \sum_{i \in J} x_i^* A_iY^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_iY^* + \sum_{i \in J} x_i^* v. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$v - \sum_{i \in J} x_i^* v = \sum_{i \in R} x_i^* A_iY^*,$$

$$v\left(1 - \sum_{i \in J} x_i^*\right) = \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^*.$$

Mivel X^* komponensei valószínűségeket jelölnek, így $\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$. Továbbá R és J index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért $1 - \sum_{i \in J} x_i^* = \sum_{i \in R} x_i^*$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$v \sum_{i \in R} x_i^* = \sum_{i \in R} x_i^* A_i \cdot Y^* \Rightarrow \sum_{i \in R} (v - A_i \cdot Y^*) x_i^* = 0.$$

Mivel R minden egyes i elemére $v - A_i \cdot Y^* > 0$ ezért szükségképpen ezen i indexekre $x_i^* = 0$. ■

14. Megjegyzés. A 13. tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_i \cdot Y^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i . stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i . stratégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan fogalmazható meg a második játékos j . stratégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v -nél többet veszít a játékos.

A 12. Megjegyzés szerint $A_i \cdot Y^* \leq v$. Viszont a 13. Tétel alapján $x_i^* > 0$ esetén nem teljesülhet a $<$ egyenlőtlenség, tehát ekkor $A_i \cdot Y^* = v$. Ezt fogalmazza meg az alábbi következmény.

15. Következmény. Legyen az A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v , továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.

(1) Ha X^* i . komponensére $x_i^* > 0$, akkor $A_i \cdot Y^* = v$.

(2) Ha Y^* j . komponensére $y_j^* > 0$, akkor $X^* \cdot A_j = v$.

Ezt a következményt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2 -es és a 3×3 -as mátrixjátékoknál.

2. A 2×2 -ES MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA

Legyen az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyereg-pont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyereg-pont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

- 1) $a < b$, $a < c$, $d < c$, $d < b$;
- 2) $a > b$, $a > c$, $d > c$, $d > b$.

Jelölje $X^* = (x, 1-x)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^* = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < 1, \quad 0 < 1 - x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < 1 - y < 1.$$

Mivel az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla, a 15. Következmény felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^* A_1 = v, \quad X^* A_2 = v, \quad A_1 \cdot Y^* = v, \quad A_2 \cdot Y^* = v,$$

ahol v a játék értéke és A_1 az A mátrix első oszlopát, A_2 a második oszlopát, A_1 . az első sorát, az A_2 . pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$(x \ 1-x) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = v, \quad (x \ 1-x) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} ax + c(1-x) &= v \\ bx + d(1-x) &= v \\ ay + b(1-y) &= v \\ cy + d(1-y) &= v. \end{aligned}$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az x , míg a második két egyenletből megkaphatjuk az y -t. Továbbá x -et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, v -t:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d}, \quad v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az A mátrix determinánsa szerepel.

16. Példa. Megoldjuk meg a feladatsor **9. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A sorminimumok maximuma 4, az oszlop maximumok minimuma 5, így nincs nyeregpont, a játék értéke: $4 \leq v \leq 5$. Felhasználva a kevert stratégiákra vonatkozó korábbi formulákat:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{5-2}{6-4-2+5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{5-4}{6-4-2+5} = \frac{1}{5}.$$

Így az első játékos optimális stratégiája: $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, a második játékos optimális stratégiája: $Y^{*T} = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$. A játék értéke:

$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{30-8}{6-4-2+5} = \frac{22}{5}.$$

17. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **7., 8. és 10.-12. feladatát**.

3. MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSÁNAK LÉPÉSEI

A mátrixjátékok megoldása az optimális stratégia megkeresését jelenti.

1. lépés: Nyeregpont keresése. Ha találunk nyeregpontot, akkor a hozzá tartozó stratégiák optimális stratégiát adnak. Ha nincs nyeregpont, akkor a 2. lépéssel folytatjuk.

2. lépés: Domináns sorok, oszlopok keresése. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa.

Az első játékos szempontjából a dominálás a következőt jelenti. Tekintsük a kifizetési mátrix i . és j . sorát:

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}.$$

Ha az $a_{it} \leq a_{jt}$, $t = 1, 2, \dots, n$, akkor a j . sor *dominálja* az i . sort, tehát az első játékos nem választja az i . stratégiát, mert azzal mindenképp rosszabbul járna, ez a stratégia elhagyható. A második játékos szempontjából, ha a k . és l . oszlopát tekintjük a kifizetési mátrixnak:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots \\ a_{mk} & a_{ml} \end{pmatrix},$$

és $a_{tk} \leq a_{tl}$, $t = 1, 2, \dots, m$ teljesül, akkor a k . oszlop *dominálja* az l . oszlopot. A második játékos mindenképp többet veszítene, ha az l . oszlopot választaná, így az l . stratégia elhagyható.

3. lépés: Kevert stratégiák keresése.

18. Példa. Az alábbi mátrix egy 4×5 -ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Keressünk domináns sorokat és oszlopokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Az első sor dominálja a 3. sort, mert az 1. sor elemei nagyobbak, mint a 3. sor megfelelő elemei, tehát az első játékosnak nem éri meg a 3. stratégiáját használni. Az első oszlop dominálja a 5. oszlopot, illetve a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot, mert a domináns oszlopok komponensei kisebb vagy egyenlők, mint a dominált oszlop megfelelő komponensei. Így a második játékos nem használja a 4. és 5. stratégiáját. A dominált sorok és oszlopok elhagyásával a következő mátrixot kapjuk:

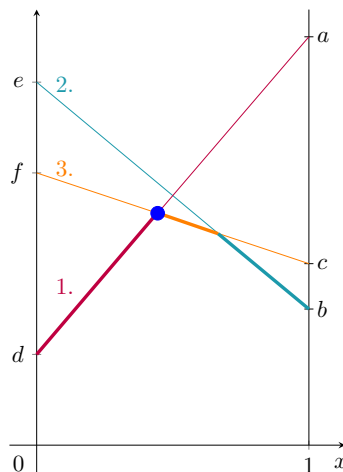
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. A $2 \times n$ -ES ÉS $n \times 2$ -ES MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA GRAFIKUS MÓDSZERREL

Grafikus módszer segítségével nagyrészt a $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixok megoldása visszavezethető 2×2 -es mátrixjátékok megoldására.

Tekintsük a következő A kifizetési mátrixsal megadott 2×3 -as mátrixjátékot

$$A = \begin{pmatrix} \overset{1.}{a} & \overset{2.}{b} & \overset{3.}{c} \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$



Jelölje $X = (x, 1 - x)$ az első játékos stratégiáját. Ekkor $x \in [0, 1]$ értékét a vízszintes tengelyen ábrázoljuk. Ha $x = 1$, akkor az első játékos az 1. tiszta stratégiájával játszik, így ott az a, b, c értékek szerepelnek, ha $x = 0$, akkor pedig a d, e, f értékek. Ha az első játékos X stratégiája ellen a második játékos az 1. stratégiájával játszik, akkor az első játékos várható kifizetése a következőképpen számolható: $XA_{1,1} = ax + d(1 - x)$, azaz egy egyenest kapunk, ami az ábrán d -vel és a -val jelölt pontokon halad át. Tehát az A mátrix minden oszlopához tartozik egy lineáris függvény, amely az első játékos X kevert stratégiája esetén az első játékos kifizetését adja. Így az optimális stratégia megtalálásához a második játékos egyes stratégiáinál szereplő értékeket az ábrán összekötjük, és a stratégiának megfelelő számmal jelöljük. Mivel a második játékos az első játékos kifizetését szeretné minimalizálni, ezért az ábrán megvastagítjuk, hogy x értékétől függően melyik stratégiával veszít a legkevesebbet, azaz az alsó burkolót vesszük. Az első játékos olyan x értéket választ, amely maximalizálja ezt a minimumot, ezért az alsó burkoló maximumát keressük. Az ábrán

bejelöljük az alsó burkoló maximumát, ami a játék értékét adja. Ez a (kék) pont két egyenes metszéspontjában található, ezért elegendő azt a két stratégiát vizsgálni, amelyekhez ezek az egyenesek tartoznak, esetünkben a második játékos 1. és 3. stratégiáját. Így a 2×3 -as játékot visszavezettük az $\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$ kifizetési mátrixhoz tartozó 2×2 -es mátrixjátékra, amelyet a korábban látott módon már megoldhatunk.

Természetesen ez a módszer nemcsak 2×3 -as, hanem $2 \times n$ -es esetben is hasonló módon alkalmazható. Viszont akár 2×3 -as esetben is előfordulhat, hogy az alsó burkoló maximumánál nem csak két stratégia metszéspontja található, hanem kettőnél több egyenes is egy pontban metszi egymást, ekkor a grafikus módszer segítségével nem lehet visszavezetni ezeket a játékokat 2×2 -es esetre.

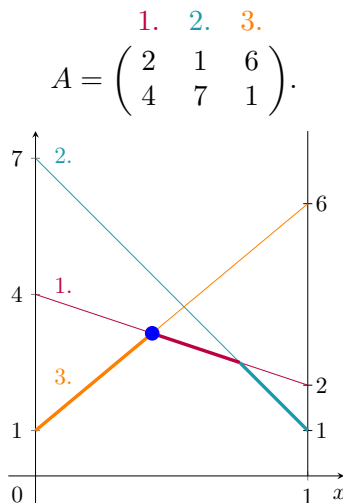
A grafikus módszer $n \times 2$ -es esetben is alkalmazható, csak akkor az ábrázolásnál az első és második játékos szerepe felcserélődik a korábban leírt módszerben, tehát az y érték kerül a vízszintes tengelyre. Továbbá a felső burkoló minimumát kell tekinteni, amikor az első játékos stratégiái közül kiválasztjuk, hogy melyik két stratégiát játsza. Természetesen itt is gondot okoz, ha kettőnél több egyenes is a kijelölt pontban metszi egymást.

19. Példa. Megoldjuk a feladatsor 13. feladatát.

Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sorminimumok maximuma) 1, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 4, tehát nincs nyeregpont, és a játék értéke $1 \leq v \leq 4$, továbbá domináns sorok, oszlopok sincsenek. Készítsük el a feladathoz tartozó ábrát.



Mivel a minimumok maximuma a második játékos 1. és 3. stratégiáinak metszéspontjánál található, így a $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ kifizetési mátrixhoz tartozó mátrixjátékra visszavezethetjük a feladatot, ami a 16. Feladatnál látott módszer felhasználásával megoldható. Így az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $Y^T = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$, és a játék értéke: $v = \frac{22}{7}$.

20. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor 14. és 15. feladatát.

A továbbiakban többször is használni fogjuk a következő tételt, ami az optimális stratégiára ad szükséges és elegendő feltételt.

21. Tétel (Optimális stratégia tétele). Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

- (1) Az X^* az első játékos optimális stratégiája $\iff v \leq X^* A_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- (2) Az Y^* a második játékos optimális stratégiája $\iff A_{i \cdot} Y^* \leq v$, $i = 1, 2, \dots, m$.

5. A 3×3 -AS SZIMMETRIKUS MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA

22. Definíció. Egy mátrixjátékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Legyen egy 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix ferdén szimmetrikus az 1. és 2. játékos optimális stratégiái megegyeznek, és a játék értéke $v = 0$.

A következő esetekben van nyeregpont:

- (1) $a > 0, b > 0$, ekkor az $(1, 1)$ nyeregpont,
- (2) $a \leq 0, c \geq 0$, ekkor a $(2, 2)$ nyeregpont,
- (3) $b \leq 0, c \leq 0$, ekkor a $(3, 3)$ nyeregpont.

Nincs nyeregpont, ha

- (a) $a > 0, b < 0, c > 0$,
- (b) $a < 0, b > 0, c < 0$.

Tekintsük az (a) esetet. Az Optimális stratégia tétele (21. Tétel) szerint az 1. játékosnak $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiája akkor és csakis akkor, ha $XA_j \geq v = 0$, ahol $j = 1, 2, 3$. Ez a mátrix segítségével felírható:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0).$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -ax_2 - bx_3 &\geq 0 \\ ax_1 - cx_3 &\geq 0 \\ bx_1 + cx_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket átrendezve, figyelembe véve, hogy az (a) esetben $a, -b$, és c is pozitív, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{a} &\geq \frac{x_2}{-b} \\ \frac{x_1}{c} &\geq \frac{x_3}{a} \\ \frac{x_2}{-b} &\geq \frac{x_1}{c}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\frac{x_3}{a} \geq \frac{x_2}{-b} \geq \frac{x_1}{c} \geq \frac{x_3}{a}$, mivel az első és utolsó kifejezés megegyezik, ezért egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható. Jelöljük t -vel a hányadosok értékét: $\frac{x_3}{a} = \frac{x_2}{-b} = \frac{x_1}{c} = t$, tehát $x_1 = tc$, $x_2 = t(-b)$, $x_3 = ta$. Mivel x_1, x_2, x_3 a megfelelő stratégiák valószínűségét jelöli, így $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ teljesül, amelyből $t = \frac{1}{a-b+c}$ kifejezést kapjuk. A t helyébe ezt az összefüggést beírva az x_1, x_2, x_3 megadható.

A 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték esetén a játék értéke 0, valamint az 1. és a 2. játékos optimális stratégiája, ha $a > 0, b < 0, c > 0$:

$$x_1 = \frac{c}{a-b+c}, \quad x_2 = \frac{-b}{a-b+c}, \quad x_3 = \frac{a}{a-b+c}.$$

A (b) esetben a mátrix 2., 3. sorának, majd 2., 3. oszlopának felcserélésével az (a) esethez jutunk.

23. Példa. Tekintsük a kő-papír-olló játék mátrixát. Mivel ez a mátrix az előző (b) esetnek felel meg, így végrehajtjuk a sor és oszlop cserét, és használjuk a formulát.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, így $x_1 = \frac{1}{1-(-1)+1} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Az x_2 és x_3 értékét fel kell cserélni ahhoz, hogy az eredeti játékhoz tartozó valószínűségeket kapjuk (ezek most megegyeznek): $X = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

24. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **16.** és **17. feladatát**.

6. A 3×3 -AS MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét (15. Következmény). Továbbá mivel az x_i -k és az y_i -k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i -kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad y_3 > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v) . Az egyenletek és az ismeretlenek számát is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{21})y_1 + (a_{12} - a_{22})y_2 + (a_{13} - a_{23})y_3 &= 0 \\ (a_{21} - a_{31})y_1 + (a_{22} - a_{32})y_2 + (a_{23} - a_{33})y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_{11} - a_{21} & k_2 &= a_{12} - a_{22} & k_3 &= a_{13} - a_{23} \\ k_4 &= a_{21} - a_{31} & k_5 &= a_{22} - a_{32} & k_6 &= a_{23} - a_{33} \end{aligned}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned} k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 &= 0 \\ k_4y_1 + k_5y_2 + k_6y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D \neq 0$):

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix} \\
y_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix}}{D} \\
y_2 &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ k_4 & 0 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix}}{D} \\
y_3 &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_4 & k_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}}{D}
\end{aligned}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3 . Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem teljesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét (15. Következmény) felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i -kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\
a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v
\end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad x_3 > 0$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikikat:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\
(a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Legyen

$$\begin{aligned} \ell_1 &= a_{11} - a_{12}, & \ell_2 &= a_{21} - a_{22} & \ell_3 &= a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 &= a_{12} - a_{13} & \ell_5 &= a_{22} - a_{23} & \ell_6 &= a_{32} - a_{33} \end{aligned}.$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \ell_3 x_3 &= 0 \\ \ell_4 x_1 + \ell_5 x_2 + \ell_6 x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}.$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix} \\ x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D} \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D -vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.

Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i -ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja. Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

4. lépés: Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a 3×3 -as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot töröltünk a játék mátrixából, akkor 2×3 -as, 3×2 -es illetve 2×2 -es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3 -as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3 -as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékokra.

Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3 -as (vagy 3×2 -es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3 -as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.

Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3 -as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele (21. Tétel) feltételeit a 3×3 -as mátrixjátékokra nézve.

25. Példa. Megoldjuk a feladatsor **19. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sornimumok maximuma) 2, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 6, tehát a játék értéke $2 \leq v \leq 6$. Mivel a feladatban az szerepel, hogy az optimális stratégiák mindhárom komponense pozitív, így az előző algoritmus 3. lépésének (a) részével folytathatjuk. Felírjuk az (1) egyenletrendszernek megfelelő bővített mátrixot a 2. játékos optimális stratégiáira, és elvégezzük a kivonásokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 1 & v \\ 0 & 7 & 4 & v \\ 4 & 2 & 8 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 27 - (-36) + 18 = 81 \neq 0. \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \quad y_2 = -\frac{-36}{81} = \frac{4}{9}, \quad y_3 = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}, \quad Y^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9} \right).$$

Az egyenletrendszer speciális formájából adódik, hogy az egyes komponensek számlálójában épp a D determináns kiszámításakor megjelenő aldeterminánsok szerepelnek.

A játék értéke az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megkapható:

$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 4 = v.$$

Az első játékos optimális stratégiája hasonlóan számítható, csak az A helyett A^T szerepel a kezdeti egyenletrendszerben, $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right)$.

26. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **18., 20., 21. feladatát**. Figyeljünk arra, hogy nem minden esetben alkalmazható az algoritmus 3. lépése.