

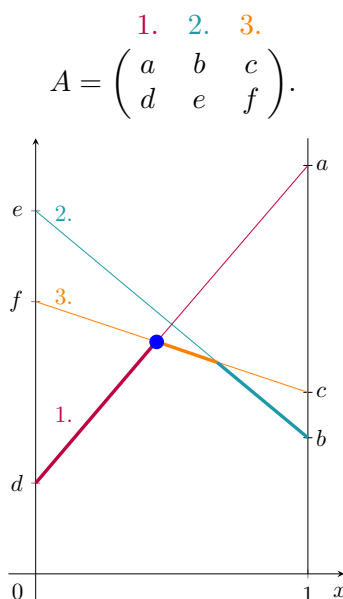
A $2 \times n$ -es mátrixjátékok megoldása grafikus módszerrel

(előadásjegyzet, 2026. március 16.)

Kátai-Urbán Kamilla

Grafikus módszer segítségével nagyrészt a $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixok megoldása visszavezethető 2×2 -es mátrixjátékok megoldására.

Tekintsük a következő A kifizetési mátrixszal megadott 2×3 -as mátrixjátékot



Jelölje $X = (x, 1 - x)$ az első játékos stratégiáját. Ekkor $x \in [0, 1]$ értékét a vízszintes tengelyen ábrázoljuk. Ha $x = 1$, akkor az első játékos az 1. tiszta stratégiájával játszik, így ott az a, b, c értékek szerepelnek, ha $x = 0$, akkor pedig a d, e, f értékek. Ha az első játékos X stratégiája ellen a második játékos az 1. stratégiájával játszik, akkor az első játékos várható kifizetése a következőképpen számolható: $XA_{\cdot 1} = ax + d(1 - x)$, azaz egy egyenest kapunk, ami az ábrán d -vel és a -val jelölt pontokon halad át. Tehát az A mátrix minden oszlopához tartozik egy lineáris függvény, amely az első játékos X kevert stratégiája esetén az első játékos kifizetését adja. Így az optimális stratégia megtalálásához a második játékos egyes stratégiáinál szereplő értékeket az ábrán összekötjük, és a stratégiának megfelelő számmal jelöljük. Mivel a második játékos az első játékos kifizetését szeretné minimalizálni, ezért az ábrán megvastagítjuk, hogy x értékétől függően melyik stratégiával veszít a legkevesebbet, azaz az alsó burkolót vesszük. Az első játékos olyan x értéket választ, amely maximalizálja ezt a minimumot, ezért az alsó burkoló maximumát keressük. Az ábrán bejelöljük az alsó burkoló maximumát, ami a játék értékét adja. Ez a (kék) pont két egyenes metszéspontjában található, ezért elegendő azt a két stratégiát vizsgálni, amelyekhez ezek az egyenesek tartoznak, esetünkben a második játékos 1. és 3. stratégiáját. Így a 2×3 -as játékot visszavezettük az $\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$ kifizetési mátrixhoz tartozó 2×2 -es mátrixjátékra, amelyet a korábban látott módon már megoldhatunk.

Természetesen ez a módszer nemcsak 2×3 -as, hanem $2 \times n$ -es esetben is hasonló módon alkalmazható. Viszont akár 2×3 -as esetben is előfordulhat, hogy az alsó burkoló maximumánál nem csak két stratégia metszéspontja található, hanem kettőnél több egyenes is egy pontban metszi egymást, ekkor a grafikus módszer segítségével nem lehet visszavezetni ezeket a játékokat 2×2 -es esetre.

A grafikus módszer $n \times 2$ -es esetben is alkalmazható, csak akkor az ábrázolásnál az első és második játékos szerepe felcserélődik a korábban leírt módszerben, tehát az y érték kerül a vízszintes tengelyre. Továbbá a felső burkoló minimumát kell tekinteni, amikor az első

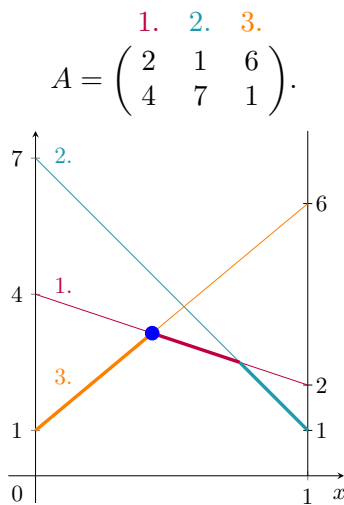
játékos stratégiái közül kiválasztjuk, hogy melyik két stratégiát játsza. Természetesen itt is gondot okoz, ha kettőnél több egyenes is a kijelölt pontban metszi egymást.

1. Példa. Megoldjuk a feladatsor **13. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sorminimumok maximuma) 1, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 4, tehát nincs nyeregpont, és a játék értéke $1 \leq v \leq 4$, továbbá domináns sorok, oszlopok sincsenek. Készítsük el a feladathoz tartozó ábrát.



Mivel a minimumok maximuma a második játékos 1. és 3. stratégiáinak metszéspontjánál található, így a $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ kifizetési mátrixhoz tartozó mátrixjátékra visszavezethetjük a feladatot, ami a korábban tanult módszer felhasználásával megoldható. Így az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $Y^T = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$, és a játék értéke: $v = \frac{22}{7}$.

2. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **14. és 15. feladatát**.