

Szimplex algoritmus

(előadásjegyzet)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Definíció. Az alábbi formájú problémát *normál feladatnak* nevezzük:

$$\begin{array}{rcll}
 a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n & \leq & b_1 & \\
 & \vdots & \vdots & \\
 a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n & \leq & b_m & , \\
 y_1, y_2, \dots, y_n & \geq & 0 & \\
 \hline
 c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n & \rightarrow & \max, &
 \end{array}$$

ahol $b_1, \dots, b_m \geq 0$, az utolsó sort *célfüggvénynek* nevezzük.

A szimplex táblázat:

	y_1	y_2	$\dots$	y_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0

2. Definíció. *Bázismegoldásnak* nevezzük, ha a bázisba bekerült változók a megfelelő jobb-oldali konstansokkal egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel.

3. Példa.

$$\begin{array}{rcll}
 -2y_1 - 2y_2 - 2y_3 & \leq & 3 & \\
 2y_1 + y_2 - 3y_3 & \leq & 4 & \\
 y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 & , \\
 \hline
 -2y_1 - 3y_2 - 5y_3 & \rightarrow & \max, &
 \end{array}$$

normál feladat. Szimplex táblázata:

	y_1	y_2	y_3	
u_1	-2	-2	-2	3
u_2	2	1	-3	4
	-2	-3	-5	0

A bázismegoldás: $u_1 = 3$, $u_2 = 4$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Szimplex algoritmus.

1. lépés: Ha a célfüggvény (az utolsó sor) nem tartalmaz pozitív együtthatót, akkor vége az eljárásnak a bázismegoldás optimális, az optimum értéke a táblázat jobb alsó sarkában lévő szám (-1) -szerse. Ellenkező esetben a 2. lépés következik.

2. lépés: Vegyük a pozitív célfüggvényegyütthatók maximumát (ha vannak egyformák, válasszuk a legkisebb indexűt). Ha a kiválasztott célfüggvény együttható (c_i) oszlopában nem szerepel pozitív együttható, akkor a célfüggvény felülről nem korlátos. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés: A kiválasztott célfüggvény együttható (c_i) oszlopában szereplő pozitív együtthatók közül választjuk ki a generálóelemet. Azt választjuk, ahol a megfelelő jobboldali konstans (b_j) és a pozitív együttható (a_{ji}) hányadosa minimális. A minimális hányadoshoz tartozó együtthatóval, mint generálóelemmel elemi bázistranszformációt hajtunk végre a táblázaton. (Azért van szükség a minimális b_j/a_{ji} kiválasztására, mert így a jobboldali konstansok egyike se válik negatívvá az elemi bázistranszformáció után, így teljesül a $y_k \geq 0$ feltétel.) Az elemi bázistranszformáció után kapott táblázattal folytatjuk az eljárást az 1. lépéstől.

4. Megjegyzés.

- Az algoritmus hibája, hogy előfordulhat, hogy végtelen ciklusba kerül, vagyis folyamatosan választva generáló elemeket, mindig visszatérünk egy korábbi táblázathoz.
- A generáló elem kiválasztásának bonyolításával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen ciklusok elkerülhetők.

5. Példa. Megoldjuk a feladatsor **24. feladatát**

Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($y_1, y_2, y_3 \geq 0$)

$$\begin{array}{rclcl}
 & y_2 & +3y_3 & \leq & 1 \\
 y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 5 \\
 2y_1 & & +y_3 & \leq & 2 \\
 \hline
 2y_1 & +4y_2 & +y_3 & \rightarrow & \max
 \end{array}$$

	y_1	y_2	y_3			y_1	u_1	y_3			u_3	u_1	y_3	
u_1	0	1*	3	1		y_2	0	1	3	1	y_2			1
u_2	1	2	-1	5		u_2	1	-2	-7	3	u_2			2
u_3	2	0	1	2		u_3	2*	0	1	2	y_1			1
	2	4	1	0			2	-4	-11	-4		-1	-4	-6

Mivel a célfüggvény nem tartalmaz pozitív együtthatót, vége az eljárásnak a bázismegoldás optimális: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, és a célfüggvény értéke: $z = 6$.

6. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **25., 26. feladatát**.