

Kooperatív játékok

(előadásjegyzet, 2024. április 19.)

Kátai-Urbán Kamilla

Neumann János és Oscar Morgenstern az n -személyes kooperatív játékok vizsgálatánál a racionális osztozkodás törvényeit tanulmányozták.

1. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza. Az $S \subseteq N$ halmazt *koalíciónak* nevezzük, azaz $S \in \mathcal{P}(N)$, ahol $\mathcal{P}(N)$ az N hatványhalmazát jelöli (N összes részhalmazának halmaza).

2. Definíció. A $v: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést *karakterisztikus függvénynek* nevezzük. Tetszőleges $S \in \mathcal{P}(N)$ esetén a $v(S)$ az a kifizetés, amit az S -ben lévő játékosok összefogva elérnek, a $v(\emptyset) = 0$ egyenlőségnek tetszőleges v karakterisztikus függvény esetén teljesülnie kell. (Az $\emptyset$ -ra vonatkozó értéket sok esetben ki se írjuk.)

3. Jelölés. (N, v) azt az n -személyes kooperatív játékot jelöli, ahol $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza, a v pedig a játékhoz tartozó karakterisztikus függvény.

4. Példa. Megoldjuk a feladatsor **38. feladatát**.

A csongrádi fitness egyesületben Judit az edző. Ha egyedül tartja az edzéseket, akkor a heti haszna 6 ezer forint. Elgondolkozik azon, hogy felvehetne maga mellé egy vagy két segédedzőt, és akkor többet járhatnának a gyerekek edzésekre. Ha csak Ancsát veszi fel maga mellé, akkor 16 ezer forint lenne a haszon, ha csak Fannit, akkor 26 ezer forint lenne. Ha mindkettőjüket felveszi, akkor 36 ezer forint lenne a haszon. Ancsa és Fanni külön-külön nem alakítana egyesületet, de ha együtt alakítanak, akkor 6 ezer forint lenne a hasznuk. Határozza meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

A játék résztvevőit a következőképpen jelöljük, 1: Judit, 2: Ancsa, 3: Fanni. Tehát a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$, a feladat szövege alapján a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

5. Feladat. Oldja meg a feladatsor **39. feladatát**.

1. SZAVAZÁSOK

A társadalmi választások elmélete a következő kérdésekkel foglalkozik.

- Hogyan tud emberek egy csoportja közös döntésre jutni?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezzenek a választási rendszerek?
- Mikor lesz egy választási rendszer demokratikus?
- Hogyan lesz az egyéni sorrendekből közös sorrend?

A következőkben néhány szavazási rendszerrel ismerkedünk meg. *Alternatíváknak* nevezzük azokat a dolgokat, amelyekre szavazni lehet.

6. Jelölés. Az alternatívák halmazát jelölje A .

7. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *többségi szavazásnál két alternatíva esetén*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| > \frac{n}{2}; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Előfordulhat, hogy egyes szavazóknak több szavazata van, tehát a szavazóknak más a súlya, így jutunk a következő szavazási formához.

8. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$, és w_i jelölje, hogy az i . szavazónak mennyi szavazata van, továbbá q jelöli, hogy hány szavazatot kell elérni. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *súlyozott többségi szavazás esetén két alternatívánál*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jele: $(q; w_1, w_2 \dots w_n)$.

9. Feladat. Oldja meg a feladatsor **40.** és **41. feladatát**.

Kenneth O. May 1952-ben bizonyította, hogy két alternatíva esetén a többségi szavazás több szempontból is az egyetlen jó szavazási módszer. A következő példa azt mutatja be, hogy három alternatívánál már előfordulhat, hogy többségi szavazás esetén az lenne a győztes, akit a többség a legkevésbé akar. Tehát fontos az alternatívák sorrendje is.

10. Jelölés. Legyen $A = \{x, y\}$, és az $x \succ y$ jelölje azt, hogy a szavazó az x alternatívát jobban szeretné, mint az y -t, azaz az x -et *preferálja* y -nal szemben.

11. Példa. Legyen $A = \{x, y, z\}$, és $n = 16$ a szavazók (játékosok) száma, a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ z$: 7 szavazónál,
- $y \succ z \succ x$: 4 szavazónál,
- $z \succ y \succ x$: 5 szavazónál,

Ekkor a többségi szavazás (mivel akkor csak azt vesszük figyelembe, hogy mi van az 1. helyen), az x alternatívát hozza ki győztesnek, pedig a szavazók többsége azt szeretné legkevésbé.

Ha kettőnél több alternatíva van, az egyik lehetőség, hogy több körös szavazást tartanak. A *többségi szavazás rájátszással* úgy zajlik, hogy minden körben többségi szavazást tartanak, és az az alternatíva esik ki, amelyik a legkevesebb szavazatot kapta.

12. Példa. Tekintsük a 11. példát 1. körnek egy rájátszásos többségi szavazásnál. Ekkor az 1. körben az y alternatíva kapta a legkevesebb szavazatot, így az esik ki. A második körben viszont az x : 7, a z : 9 szavazatot kap, tehát a z nyer.

Sok esetben nem akarnak több körös szavazást rendezni. Jean-Charles de Borda francia matematikus, fizikus, 1770-ben a Francia Tudományos Akadémia tagjainak megválasztására találta ki a következő módszert, amely egy közös sorrendet állít elő a szavazók egyéni preferencia-sorrendjeiből. Ezt a szavazási rendszert most is használják a tudományos életben, pl. a Szegedi Tudományegyetemen is vannak szavazások, amelyek így zajlanak.

13. Definíció. A *Borda-pontozás* menete:

- Minden szavazó az alternatívákat között sorrendet állít fel, azaz megadja a preferencia-sorrendjét.
- Ha az alternatívák száma $|A| = m$, akkor az első helyen lévő alternatíva m pontot kap, a második helyezett $m - 1$ pontot, és így tovább, az utolsó 1-et.
- A pontokat összegzik az egyes alternatívák esetén az összes szavazóra.

A Borda-pontozásban az a győztes, aki a legtöbb pontot éri el, és az elért pontok alapján egy közös sorrend is megadható.

14. Példa. Megoldjuk a feladatsor **42. feladatát**.

Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $y \succ x \succ z \succ u$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Ennél a feladatnál $|A| = m = 4$, így az egyes alternatívákra eső pontokat a következőképpen kapjuk.

- x : $1 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 51$,
- y : $1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 26$,
- z : $1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 52$,
- u : $1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 21$.

Ez alapján a választást z nyeri, a közös sorrend: $z \succ x \succ y \succ u$.

15. Feladat. Oldja meg a feladatsor **43.**, **44. feladatát**.

Megfigyelhető, hogy a 42. és 43. feladatnál megadott preferencia-sorrendeknél, csak egy szavazónál van különbség. Ha a szavazó tudja, hogy melyik két alternatíva lehet esélyes a győzelemre, akkor a saját preferencia-sorrendjét tudja úgy módosítani, hogy a számára kedvezőbb alternatíva győzzön. Ezért a Borda-pontozás *taktikailag manipulálható* szavazási rendszer. A Borda-pontozás *nem független a lényegtelen alternatíváktól*, hiszen két alternatíva helyzete a végső sorrendben nemcsak azon múlik, hogy egymáshoz képest hogy rendezi a szavazó, hanem attól is függ, hogy a többi alternatívához képest hogyan rendezi.

A francia forradalom idején találta ki Nicolas de Condorcet a következő módszert, ami egy jó szavazási rendszernek tűnik, de a későbbiekben látjuk, hogy vannak vele problémák.

16. Definíció. A *Condorcet-módszer* menete:

- Az alternatívák között az összes párra többségi szavazást hajtunk végre.
- Az az alternatíva a végső győztes (Condorcet-győztes), ami minden páronkénti többségi szavazásban győztes.

17. Példa. Az $A = \{x, y, z\}$ az alternatívák halmaza, 3 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ z$,
- $y \succ x \succ z$,
- $z \succ x \succ y$.

A páronkénti többségi szavazásnál: $x \succ y$, $x \succ z$, $y \succ z$.

Az x alternatíva a Condorcet-győztes, a közös sorrend: $x \succ y \succ z$.

18. Példa. Az előző példához képest csak annyit változtassunk, hogy a második preferencia-sorrendben cseréljük fel x és z szerepét.

- $x \succ y \succ z$,
- $y \succ z \succ x$,
- $z \succ x \succ y$.

A páronkénti többségi szavazásnál: $x \succ y$, $y \succ z$, $z \succ x$.

Nincs Condorcet-győztes, ez az úgynevezett *Condorcet-paradoxon*.

Kenneth Arrow 1950-ben egy érdekes tételt bizonyított, amelynek kimondásához néhány fogalomra szükségünk van. Egy szavazót *diktátornak* nevezünk, ha az általa megadott preferencia-sorrend lesz minidig a közös sorrend. Egy szavazási rendszer *diktatúra*, ha van a szavazók között diktátor. A szavazási rendszert *egyhangúnak* nevezzük, ha minden szavazónak ugyanaz a preferencia-sorrendje, akkor ez lesz a közös sorrend is. A szavazási rendszer *független a lényegtelen alternatíváktól*, ha két alternatíva helye a közös sorrendben csak attól függ, hogy egymáshoz képest hogyan rendezik a szavazók, és nem függ attól, hogy a többi alternatívához képest hogyan rendezték. (Korábban láttuk, hogy a Borda-pontozás nem független a lényegtelen alternatíváktól.)

19. Tétel. (*Arrow-tétele*) Legalább három alternatíva esetén, ha a szavazási rendszer egyhangú, és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor diktatúra.

2. STRATÉGIAI EKVIVALENCIA

20. Definíció. Az (N, v) n -személyes kooperatív játékot *valódi (lényeges) játéknak* nevezzük, ha $v(N) > \sum_{i=1}^n v(\{i\})$ teljesül. Azaz ha az összes játékos összefog, akkor nagyobb kifizetést érnek el, mint külön-külön.

21. Definíció. Az (N, v) és az (N, v') n -személyes kooperatív játékok *stratégiaileg ekvivalensek*, ha léteznek olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok, és $c > 0$ valós szám, amelyre

$$v'(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \text{bármely } S \subseteq N\text{-re.}$$

22. Megjegyzés. A stratégiai ekvivalencia olyan reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, így tartozik hozzá egy osztályozás. A következő definíció és tétel segítségével minden osztályból kijelölhető egy speciális tulajdonságú elem.

23. Definíció. Az (N, v) n -személyes kooperatív játék $(0, 1)$ -normalizált, ha teljesülnek a következők:

- (1) $v(\{i\}) = 0$, bármely $i = 1, 2, \dots, n$ esetén;
- (2) $v(N) = 1$.

24. Tétel. Minden valódi (lényeges) (N, v) n -személyes kooperatív játék stratégiaileg ekvivalens egy egyértelműen meghatározott $(0, 1)$ -normalizált játékkal.

Bizonyítás. Keressük az (N, v) -vel stratégiaileg ekvivalens (N, v') játékot, amelyre igaz, hogy $v'(\{i\}) = 0$ bármely $i = 1, \dots, n$ -re és $v'(N) = 1$, azaz az (N, v') kooperatív játék $(0, 1)$ -normalizált. A stratégiai ekvivalencia definíciójából adódóan a következők teljesülnek:

$$v'(\{i\}) = cv(\{i\}) + a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (1)$$

$$v'(N) = cv(N) + \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2)$$

Az (1) egyenletből kapjuk:

$$a_i = -cv(\{i\}). \quad (3)$$

Az (1)-ben szereplő n egyenletet összegezve kapjuk: $\sum_{i=1}^n a_i = -c \sum_{i=1}^n v(\{i\})$. Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe

$$cv(N) - c \sum_{i=1}^n v(\{i\}) = 1. \quad (4)$$

Mivel feltettük, hogy a játék valódi, így a definíció alapján $v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\}) > 0$. Tehát a (4) egyenletből kifejezhetjük a c -t:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\})} > 0. \quad (5)$$

A (3)-ba behelyettesítve, amit a c -re az (5)-ben kaptunk:

$$a_i = -cv(\{i\}) = \frac{-v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\})}. \quad (6)$$

Mivel az (1) és (2) egyértelmű megoldása az (5) és a (6), így a v' is egyértelműen meghatározott, tehát egyetlen $(0, 1)$ normalizált játék van minden ekvivalenciaosztályban.

25. Példa. Megoldjuk a feladatsor **45. feladatát**.

Végezzon $(0, 1)$ -normalizációt az (N, v) 4-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{ha } |S| = 1; \\ 5, & \text{ha } |S| = 2; \\ 7, & \text{ha } |S| = 3; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Keressük azt a $(0, 1)$ -normalizált (N, v') 4-személyes kooperatív játékot, amely stratégiaileg ekvivalens az eredeti játékkal. A stratégiai ekvivalencia definíciójából: $v'(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i$ teljesül bármely $S \subseteq N$ -re. A 24. tétel bizonyítása alapján a c és az $a_1, \dots, a_4$ számok a következőképpen számolhatók:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^4 v(\{i\})} = \frac{1}{10 - \sum_{i=1}^4 2} = \frac{1}{10 - 8} = \frac{1}{2},$$

$$a_i = -cv(\{i\}) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Tehát az eredeti játékkal stratégiaileg ekvivalens $(0, 1)$ -normalizált (N, v') játék karakterisztikus függvénye:

$$v'(S) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{2} \cdot 5 - 2 = \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{2} \cdot 7 - 3 = \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 3; \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 4 = 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

26. Feladat. Oldja meg a feladatsor **46. feladatát**.