Játékelmélet feladatok – megoldások [1]

Véges fákkal ábrázolt játékok

1. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1-fokú pontja van.

(a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
(b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
(c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

Megoldás.

(a) 2 és 18 között bármely egész értéket felvehet.
(b) 3.
(c) 9.

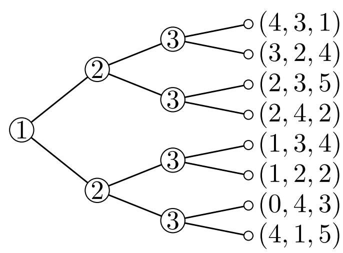
2. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

Megoldás. Egy n pontú fának $n-1$ éle van, azaz az erdő minden fa-komponensének 1-gyel több pontja van, mint éle, így 21 pont van.

3. Feladat. A síkban adott 14 különböző pont. Andi és Balázs felváltva kötnek össze két különböző pontot egy éllel. A játék kezdetén semelyik két pont sincs összekötve, az első élt Andi rajzolja. Az veszít, aki olyan élt rajzol be, amellyel a gráfban keletkezik kör. Milyen esélye van Andinak, illetve Balázsnak, hogy nyerjen?

Megoldás. Egy n pontú fának $n-1$ éle van, tehát 13 élt lehet behúzni, anélkül, hogy kört kapnának, az utolsó élt Andi húzza be.

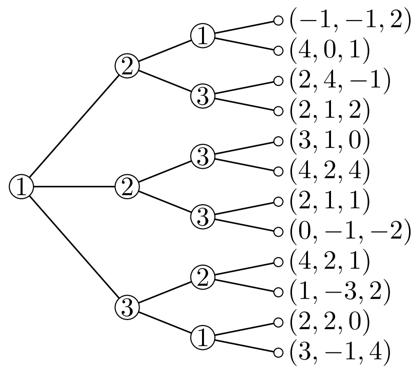
4. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.



Megoldás. (Ld. előadásvázlat.) Az egyensúlya a $(2,3,5)$.

5. Feladat. Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.

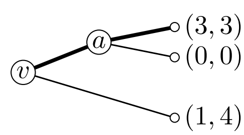
[1]Ha a feladat sorszáma melett az szerepel, hogy *kidolgozott feladat*, akkor a részletes megoldása megtalálható a megfelelő előadás vázlatban.



Megoldás. Figyeljünk, hogy melyik pontban melyik játékos választ. Az egyensúlya a $(4, 2, 4)$.

6. Feladat. Egy áruházlánc ellenőrzése alatt tart egy piacot, amire belép egy vállalkozó. Az áruházláncnak két stratégiája van: engedi, hogy a vállalkozó a piacon maradjon vagy kiszorítja. A vállalkozó stratégiái: megmarad a piacon vagy kilép. Az egyes kifizetések a következők: ha a vállalkozó kilép, akkor az áruházlánc nyeresége 4 egység a vállalkozóé 1 egység. Ha a vállalkozó nem lép ki a piacról, de az áruházlánc utána kiszorítja, akkor nem nyernek semmit, ha nem szorítja ki, akkor mindkét szereplő 3-3 egységet nyer. Adja meg a problémához tartozó véges gyökeres fát, és határozza meg az egyensúlyát.

Megoldás. A vállalkozót jelölje v, az áruházláncot a, ekkor a problémához tartozó véges gyökeres fa:



Az egyensúlyi pont a $(3, 3)$, azaz az a vállalkozó nem lép ki a piacról, és az áruházlánc nem szorítja ki.

A $2 \times n$-es és $n \times 2$-es mátrixjátékok

7. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Létezik nyeregpont, mivel a sorminimumok maximuma megegyezik az oszlopmaximumok minimumával. Az első játékos a 2. stratégiájával játszik, a második játékos pedig az 1. stratégiával, a játék értéke $v = 2$.

8. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2-es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, a második optimális stratégiája: $Y^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, a játék éréke $v = \frac{9}{5}$.

9. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2-es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, a második optimális stratégiája: $Y^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, a játék éréke $v = \frac{22}{5}$.

10. Feladat. Andi és Balázs szócsatát játszik. Andi az a, $ű$, míg Balázs az r, z, d betűkből választ egyet-egyet egyszerre. Ha Andi olyan értelmes szót tud alkotni a kiválasztott két betűből, ami nem ige, akkor 1 Ft-ot kap Balázstól, ha ige, akkor 5 Ft-ot kap, ha nem tud értelmes szót alkotni, akkor Balázs kap 3 Ft-ot Anditól. Adja meg a játék kifizetési mátrixát. Határozza meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

Megoldás. A játék kifizetési mátrixa:

	r	z	d
a	-3	1	5
$ű$	1	5	-3

Dominálás miatt 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $Y^T = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$. A játék értéke $v = -\frac{1}{3}$.

11. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$. A játék értéke $v = 3$.

12. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $Y^T = \left(\frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7}, 0, 0\right)$. A játék értéke $v = \frac{6}{7}$.

13. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $Y^T = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7}\right)$.

14. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y^T = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

15. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 5×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2-es mátrixjátékra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékra: $X = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $Y^T = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

A 3×3-as mátrixjátékok

16. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $v = 0$.

17. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Alakítsa át a mátrixot úgy, hogy egy szimmetrikus mátrixjátékot kapjon. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $v = 0$.

18. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás van a sorok és az oszlopok között is (az algoritmus 2. lépése), 2×2-es mátrixjáték megoldására vezet. $X = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $Y^T = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $v = \frac{5}{3}$.

19. Feladat. (Kidolgozott feladat.) Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $v = 4$.

20. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5}\right)$, $Y^T = \left(\frac{19}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{15}\right)$, $v = \frac{23}{5}$.

21. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 4. lépését alkalmazzuk. Az első játékos 1. stratégiáját elhagyva visszavezethetjük 2×3-as játékra, az Optimális stratégia tételével ellenőrizzük, hogy az optimális megoldást kaptuk-e. $X = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $v = \frac{14}{3}$.

Diagonális játékok

22. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 4×4-es diagonális mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = \left(\frac{10}{39}, \frac{5}{39}, \frac{4}{39}, \frac{20}{39}\right)$, $v = \frac{20}{39}$.

Lineáris programozás és a mátrixjátékok

23. Feladat. Számolja ki a következő mátrix inverzét elemi bázistranszformáció segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

24. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(y_1, y_2, y_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rrrcc} & y_2 & +3y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 5 \\ 2y_1 & & +y_3 & \leq & 2 \\ \hline 2y_1 & +4y_2 & +y_3 & \to & \max \end{array}$$

Megoldás. $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $z = 6$.

25. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(y_1, y_2 \geq 0)$

$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_2 & \leq & 3 \\ 2y_1 - 3y_2 & \leq & 8 \\ \hline 2y_1 + y_2 & \to & \max \end{array}$$

Megoldás. Elemi bázistranszformáció után a szimplex algoritmus 2. lépése teljesül, a célfüggvény felülről nem korlátos.

26. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0)$

$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_5 & \leq & 20 \\ y_1 + y_3 & \leq & 30 \\ y_1 + y_2 + y_4 & \leq & 10 \\ y_2 - y_3 - y_4 + y_5 & \leq & 0 \\ \hline y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 & \to & \max \end{array}$$

Megoldás. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 30$, $y_4 = 10$, $y_5 = 40$, $z = 330$.

27. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $Y^T = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $v = \frac{15}{7}$.

28. Feladat. Az alábbi mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $Y^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $v = \frac{10}{4}$.

29. Feladat. Oldja meg a feladatot kétfázisú módszer segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq & 10 \\ \hline x_1 & +x_2 & +x_3 & \to & \max \end{array}$$

Megoldás. $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $z = 8$.

30. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az első játékos optimális stratégiáját kétfázisú módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Bimátrixjátékok, gazdasági alkalmazások

31. Feladat. Oldja meg azt a 2×2-es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, az $x = 0$, $y = 0$ értékek tartoznak az egyensúlyi ponthoz, így $X = (0, 1)$, $Y^T = (0, 1)$, azaz mindkét játékos a második tiszta stratégiájával játszik. A játékosok kifizetései: $E_1(0, 0) = 4$, $E_2(0, 0) = 5$.

32. Feladat. Oldja meg azt a 2×2-es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

(1) $x = 0$, $y = 1$: $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 5$, $E_2(0, 1) = 3$;
(2) $x = 1$, $y = 0$: $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 1) = 3$, $E_2(0, 1) = 4$;
(3) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{5}$: $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{5}$, $E_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{2}$.

33. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) (*Ajándékozási-dilemma*) A Young házaspárnak mindösszé két kincse van, Jim családi örökségéből származó aranyórája és Della szép, hosszú haja. Karácsonyra meg akarják lepni egymást valami szép ajándékkal. Tudják egymásról, hogy mire vágynak; Jim egy óraláncra, Della pedig egy fésűs csatra. Mivel szegények, ezért pénzt csak a meglévő kincsük eladásával tudnak szerezni, de ezzel értéküket vesztik az ajándékok is. Ha mindketten eladják az értékeiket, akkor annak a szituációnak az értéke legyen 0. Az ajándékozás örömét értékeljük 2 egységgel, a megajándékozott örömét 1 egységgel. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

(1) $x = 0$, $y = 1$: $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$;
(2) $x = 1$, $y = 0$: $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 1) = 2$, $E_2(0, 1) = 1$;

(3) $x = y = \frac{2}{3}$: $X = Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

34. Feladat. (*Fogoly-dilemma*) Két férfit fegyveres rablással gyanúsítanak, nincs döntő bizonyíték ellenük, de ők ezt nem tudják. A rendőr felajánlja mindkettőjüknek, hogy ha bevallja a rablást, de a másik tagad, akkor a beismerő vallomást tevő rabot felmentik, a tagadó rab 20 évet kap. Ha mindketten vallanak, akkor az enyhítő körülmény, így 5-5 évet kapnak. Ha mindketten tagadnak, akkor a rájuk bizonyítható tiltott fegyverviselésért 1-1 évet kapnak. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -20 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -5 & -20 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az $x = 1$, $y = 1$ egyensúlyi pont, azaz mindkét játékos az első stratégiáját választja, tehát vallanak, egyensúlyi pont: $X = Y^T = (1, 0)$, a kifizetéseik: $E_1(1, 1) = E_2(1, 1) = -5$.

35. Feladat. (*Családi vita*) Egy fiatal házaspár este szórakozni akar menni. A férfi egy ökölvívó mérőzést szeretne megnézni, a nő pedig színházba szeretne menni. Nem tudják előre megbeszélni, de csak akkor mennek el valahova, ha ugyanazt választják. Ha odamennek, amit szeretnének, annak legyen 2 egység az értéke, ha nem odamennek, annak 1 egység, ha pedig otthon maradnak, annak -1 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

(1) $x = y = 0$: $X = Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 0) = 2$, $E_2(0, 0) = 1$;
(2) $x = y = 1$: $X = Y^T = (1, 0)$, $E_1(1, 1) = 1$, $E_2(1, 1) = 2$;
(3) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{3}{5}$: $X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $Y^T = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $E_1\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) = E_2\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

36. Feladat. (*Duopólium*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. Mindkét cég kétféle árajánlatot tehet, magasat vagy alacsonyat. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyat ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabbat fogják választani a vásárlók, így annak vállalatnak a profitja legyen 14 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az $x = 0$, $y = 0$ egyensúlyi pont, azaz mindkét vállalat a második stratégiáját választja, tehát alacsony árat ajánlanak, egyensúlyi pont: $X = Y^T = (0, 1)$, a kifizetéseik: $E_1(1, 1) = E_2(1, 1) = 7$.

37. Feladat. (*Legnagyobb kedvezmény elve*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. A vállalatok szerződésben garantálják a vevőknek, hogyha a jövőben másnak alacsonyabb árat ajánlanak, akkor a tőle kért árat is erre az alacsonyabb szintre szállítják le. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyat ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabb árat ajánló vállalatnak az árgaranciákat is be kell váltani, így annak vállalatnak a profitja legyen 9 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

(1) $x = y = 0$: $X = Y^T = (0,1)$, $E_1(0,0) = E_2(0,0) = 7$;
(2) $x = y = 1$: $X = Y^T = (1,0)$, $E_1(1,1) = E_2(1,1) = 10$;
(3) $x = y = \frac{8}{9}$: $X = Y^T = \left(\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$, $E_1\left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right) = E_2\left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right) = 8\frac{7}{9}$.

Kooperatív játékok

38. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) A csongrádi fitness egyesületben Judit az edző. Ha egyedül tartja az edzéseket, akkor a heti haszna 6 ezer forint. Elgondolkozik azon, hogy felvehetne maga mellé egy vagy két segédedzőt, és akkor többet járhatnának a gyerekek edzésekre. Ha csak Ancsát veszi fel maga mellé, akkor 16 ezer forint lenne a haszon, ha csak Fannit, akkor 26 ezer forint lenne. Ha mindkettőjüket felveszi, akkor 36 ezer forint lenne a haszon. Ancsa és Fanni külön-külön nem alakítana egyesületet, de ha együtt alakítanak, akkor 6 ezer forint lenne a hasznuk. Határozza meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, $1:$ Judit, $2:$ Ancsa, $3:$ Fanni. A karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1,2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1,3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2,3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

39. Feladat. Egy halastó tulajdonosa befektetőket keres. Két befektető jelentkezik, az egyik horgásztavat akar kialakítani, a másik egy csúszdaparkot szeretne építeni a tónál. Mivel a csúszdázók elijesztenék a halakat, így a két tervet egyszerre nem lehet megvalósítani. A halastó haszna 5 millió forint, a horgásztóval 10 millió forint, a csúszdaparkkal 15 millió forint hasznot érhetnek el. Adja meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, 1: halastó-tulaj, 2: horgásztó-befektető, 3: csúszdapark-befektető. A karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 5, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 10, & \text{ha } S = \{1,2\}; \\ 15, & \text{ha } S = \{1,3\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2,3\}; \\ 15, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

40. Feladat. Az ENSZ biztonsági tanácsának 5 állandó és 10 választott tagja van. Egy határozat akkor lép életbe, ha az 5 állandó, és legalább 4 választott tag megszavazza. Adjon meg a feladathoz tartozó olyan súlyozott többségi szavazást, ahol a választott tagok súlya legyen 1, és az állandó tagok súlya a lehető legkisebb egész szám.

Megoldás. Az állandó tagok legkisebb súlya: 7 lehet. Az előadás jegyzet jelöléseit használva, a súlyozott többségi szavazás: (39;7,7,. . . ,7,1,1,. . . ,1).

41. Feladat. Egy társasházban négy lakás van, az A lakás $100\,m^2$, a B lakás $125\,m^2$, a C $100\,m^2$ és a D pedig $50\,m^2$ alapterületű. A lakógyűlésen akkor szavaznak meg egy döntést, ha az arra szavazók lakásainak alapterülete a teljes alapterületnek legalább a fele. Adjuk meg a szavazáshoz tartozó karakterisztikus függvényt úgy, hogy a nyertes koalíciók esetén a függvény értéke legyen 1, különben pedig 0. Ezután határozzuk meg, hogy melyek azok a legkisebb nemnegatív egész súlyok, amelyek a lakásokhoz rendelhetők, ha súlyozott többségi szavazásként szeretnénk megadni a lakógyűlést.

Megoldás. Mivel az össz alapterület $375\,m^2$, így legalább $187{,}5\,m^2$ alapterülettel kell rendelkezni egy nyertes koalíciónak, tehát a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 0, & \text{ha } S = \{A\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{B\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{C\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{A,D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{B,D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{C,D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,B\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{B,C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,B,C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,C,D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,B,D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{B,C,D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A,B,C,D\}. \end{cases}$$

A karakterisztikus függvény alapján jól látszik, hogy a nagyobb (A, B, C) lakások esetén már bármely kettő nyerő koalíciót alkot. A kicsi (D) lakás viszont azzal, hogy belép egy koalícióba nem változtat a koalíció pozícióján. Az előadás jegyzet jelöléseit használva, a súlyozott többségi szavazás a lakógyűlés esetén: (2;1,1,1,0), azaz a D lakásban lakóknak nem számít szavazata.

42. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $y \succ x \succ z \succ u$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. A választást z nyeri, a közös sorrend: $z \succ x \succ y \succ u$.

43. Feladat. Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. A választást x nyeri, a közös sorrend: $x \succ z \succ y \succ u$.

44. Feladat. Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 22 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 9 szavazónál,
- $y \succ x \succ z \succ u$: 6 szavazónál,
- $z \succ u \succ y \succ x$: 7 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. Az y a győztes, a közös sorrend: $y \succ x \succ z \succ u$.

45. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Végezzen $(0,1)$-normalizációt az (N, v) 4-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{ha } |S| = 1; \\ 5, & \text{ha } |S| = 2; \\ 7, & \text{ha } |S| = 3; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Megoldás.

$$v'(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 3; \\ 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

46. Feladat. Végezzen $(0,1)$-normalizációt az (N,v) 6-személyes kooperatív játékon, ha $N=\{1,2,3,4,5,6\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S\subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S)=\begin{cases}1, & \text{ha } |S|=1;\\ 3, & \text{ha } |S|=2;\\ 5, & \text{ha } |S|=3;\\ 7, & \text{ha } |S|=4;\\ 10, & \text{ha } |S|=5;\\ 12, & \text{ha } S=N.\end{cases}$$

Megoldás.

$$v'(S)=\begin{cases}0, & \text{ha } |S|=1;\\ \frac{1}{6}, & \text{ha } |S|=2;\\ \frac{1}{3}, & \text{ha } |S|=3;\\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S|=4;\\ \frac{5}{6}, & \text{ha } |S|=5;\\ 1, & \text{ha } S=N.\end{cases}$$

47. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Határozza meg a **38**. Feladatban megadott 3-személyes kooperatív játékhoz tarozó Shapley-értéket. (Használja a **38**. Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás. $\Phi(v)=(19,6,11)$.

48. Feladat. Határozza meg a **39**. Feladatban megadott 3-személyes kooperatív játékhoz tarozó Shapley-értéket. (Használja a **39**. Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás. $\Phi(v)=(\frac{65}{6},\frac{5}{6},\frac{10}{3})$.

49. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) A **38**. Feladatban megadott karakterisztikus függvény szuperadditív. Határozza meg az elosztások halmazát, és a kooperatív játék magját. (Használja a **38**. Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás.

$$E(v)=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1\geq 6,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_1+x_2+x_3=36\},$$
$$C(v)=\{(x_1,x_2,x_3)\colon 6\leq x_1\leq 30,\ 0\leq x_2\leq 10,\ 0\leq x_3\leq 20,\ x_1+x_2+x_3=36\}.$$

50. Feladat. A **39**. Feladatban megadott karakterisztikus függvény szuperadditív. Határozza meg az elosztások halmazát, és a kooperatív játék magját. (Használja a **39**. Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás.

$$E(v)=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1\geq 5,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_1+x_2+x_3=15\},$$
$$C(v)=\{(x_1,x_2,x_3)\colon 10\leq x_1\leq 15,\ x_2=0,\ 0\leq x_3\leq 5,\ x_1+x_3=15\}.$$

51. Feladat. Legyen (N,v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N=\{1,2,3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S\subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S)=\begin{cases}0, & \text{ha } |S|=1;\\ 0, & \text{ha } S=\{1,3\};\\ 2, & \text{ha } S=\{1,2\};\\ 4, & \text{ha } S=\{2,3\};\\ 4, & \text{ha } S=N.\end{cases}$$

Határozza meg az elosztások halmazát és a játék magját.

Megoldás.

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1, x_2, x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 4\},$$
$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 = 0,\ 2 \leq x_2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ x_2 + x_3 = 4\}.$$

52. Feladat. (*Szitakötő vírus*[2]) A Nagy Kerekerdő közepén ott áll a Toboz nevű kisfalu, szélén a Kék tavacskával, ahol sok szitakötő él. Egy meleg nyári délután Józsi bácsi a falu kis közösségének tyúkhúslevest főzött falunapra, sokan ettek a házi finomságból. Másnap Piri néni elkezdett szédelegni, így elment a faluorvoshoz, hogy kivizsgáltassa magát. Dr. Kör Albert szitakötő vírust diagnosztizált. Kiderült, hogy Józsi bácsi tyúkja beteg szitakötőt evett, így a tyúkhúsleves fertőzött volt. Mivel Piri néni állapota súlyos volt, ezért Dr. Kör Albert elküldte őt a patikába Károly bácsihoz, hogy vegyen Szitikusz gyógyszert, és szedje azt két hétig, majd utána jöjjön vissza ellenőrzésre. Sanyi is Piri nénihez hasonló panaszokkal érkezett meg a rendelőbe, de mivel az ő állapota nem volt olyan súlyos, ezért neki a doktor úr csak egy házi főzetet írt fel, amit Károly bácsi a patikában készített el. Dr. Kör Alberthez egyre több beteg érkezett szitakötő vírussal, ezért rendelt a gyógyszergyártótól Szitikuszt, hogy rögtön oda tudja adni a betegeknek a gyógyszert. Így Dr. Kör Albert és a gyógyszergyártó közös haszna 2,5 rut volt. Mivel a faluban elterjedt a hír, hogy szitakötő vírust kaptak el azok, akik Józsi bácsi tyúkhúslevesésből ettek, ezért voltak akik rögtön Károly bácsihoz mentek Szitikuszért. Károly bácsinak is rendelnie kellett Szitikuszt. Abban az esetben, ha a beteg a doktor urat kihagyva rögtön Károly bácsihoz ment gyógyszerért, akkor Károly bácsinak és a gyógyszergyártónak a közös haszna 2,5 rut. Ha a beteg először Dr. Kör Alberthoz ment, a doktor úr pedig Károly bácsihoz küldte Szitikuszért, akkor Dr. Kör Albert, Károly bácsi és a gyógyszergyártó közös haszna 3 rut. Akinél Sanyiéhoz hasonló volt a betegség lefolyása, vagyis a kezelés megoldható volt Szitikusz nélkül, azoknál Dr. Kör Albert és Károly bácsi haszna 2 rut. Az egyes esetek bekövetkezése egymástól független és egyenletes. Hogyan oszthatják szét az együttműködés során befolyó pénzt? Adja meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét. Határozza meg az elosztások halmazát, a Shapley-értéket, és a játék magját. (Megoldás a következő oldalon.)

[2] Kiskároly Tímea feladata

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, 1: Dr. Kör Albert, 2: György, 3: Károly bácsi. A karakterisztikus függvény, az elosztások halmaza, a Shapley-érték és a mag:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 0, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ \frac{5}{2}, & \text{ha } S = \{1,2\}; \\ 2, & \text{ha } S = \{1,3\}; \\ \frac{5}{2}, & \text{ha } S = \{2,3\}; \\ 3, & \text{ha } S = N, \end{cases}$$

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1, x_2, x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3\},$$

$$\Phi(v) = \left(\frac{11}{12}, \frac{7}{6}, \frac{11}{12}\right),$$

$$C(v) = \emptyset.$$