Mátrixjátékok
(előadásjegyzet, 2022. május 2.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Alapfogalmak, tételek

1. Definíció. A játékoknál az egyes stratégiákhoz tartozó nyereményeket *kifizetési függvények* adják meg, a függvények által megadott valós számokat *kifizetéseknek* nevezzük.

2. Definíció. Egy játéknak a játékosok adott stratégiái esetén (Nash-féle) *egyensúlyi helyzete* van, ha minden játékos esetén teljesül, hogy egyoldalúan változtatva a stratégiáján nem érne el nagyobb kifizetést.

3. Definíció. A játékot *nullaösszegűnek* nevezzük, ha az egyes játékosok nyereménye a többi játékos vesztesége. Azaz, ha az összes játékos kifizetéseit összegezzük, akkor 0-át kapunk.

4. Definíció. Minden véges kétszemélyes nullaösszegű játéknál a stratégiapárokhoz tartozó kifizetéseket táblázatban, azaz mátrixban ábrázolhatjuk, ezért az ilyen típusú játékokat *mátrixjátékoknak* nevezzük.

5. Definíció. Ha egy mátrixjáték esetén az 1. játékosnak m stratégiája van, a 2. játékosnak pedig n, akkor az 1. játékos kifizetéseit egy $m\times n$-es A valós mátrix elemeiként ábrázolhatjuk. Ezt az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot nevezzük a *játék kifizetési mátrixának*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i. sorának j. eleme a_{ij}, az az érték, amit az 1. játékos nyer, ha ő az i. stratégiájával játszik, a 2. játékos pedig a j. stratégiájával. Ekkor a 2. játékos kifizetése $-a_{ij}$, ugyanis a játék nullaösszegű. Tehát erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij}-t fizet az 1. játékosnak. Ha $a_{ij} > 0$, akkor erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij}-t fizet az 1. játékosnak.

6. Definíció. Ha a mátrixjáték kifizetési mátrixa A, akkor az A mátrix sorminimumainak maximumát *alsóértéknek*, az oszlopmaximumainak minimumát pedig *felsőértéknek* nevezzük. Az alsóérték kisebb vagy egyenlő a felsőértéknél, ha az egyenlőség teljesül, *nyeregpontnak* nevezzük.

7. Tétel. *Mátrixjátékok bármely két nyeregpontja azonos értékű.*

8. Tétel (Minimax tétel). *Bármely mátrixjátéknak van egyensúlyi helyzete.*

9. Definíció. Ha a játékos csak az egyik stratégiájával játszik, és a többit nem használja, akkor ezt *tiszta stratégiának* nevezzük, különben *kevert stratégiának.*

Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Az 1. játékos stratégiáinak S_1 halmaza az összes olyan m-komponensű $X = (x_1, \dots, x_m)$ vektor, amelyre $x_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$ és $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. A 2. játékos esetén pedig az n-komponensű $Y^T = (y_1, \dots, y_n)$ vektrok halmaza, amelyre $y_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, n)$ és $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Azaz az 1. játékos x_i valószínűséggel játsza az i. stratégiáját, és a 2. játékos y_j valószínűséggel a j. stratégiáját. Ekkor az 1. játékos várható kifizetése:

$$XAY = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

10. Definíció. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. A mátrixjátéknak $X^* \in S_1$ és $Y^* \in S_2$ *egyensúlyi helyzete* (*optimális stratégiája*), ha

$$XAY^* \le X^*AY^* \le X^*AY,$$

tetszőleges $X \in S_1,\ Y \in S_2$ estén. Azaz egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni, az 1. játékos nem nyerne többet, a 2. játékos pedig nem veszítene kevesebbet, ha az egyensúlyi helyzettől eltérne.

11. Definíció. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és X^*, Y^* optimális stratégiája, ekkor a $v = X^*AY^*$ egyensúlyi helyzetben elért várható kifizetést a *játék értékének* nevezzük.

12. Jelölés. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, ekkor jelölje $A_{i\cdot}$ az A mátrix i. sorvektorát, ahol $i \in \{1, \ldots, m\}$. $A_{\cdot j}$ pedig jelölje az A mátrix j. oszlopvektorát tetszőleges $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén.

Ha A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az $XA_{\cdot j}$ a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j. tiszta stratégiát. Hasonlóan az $A_{i\cdot}Y$ kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i. tiszta stratégiát.

13. Tétel (Optimális stratégia tétele). *Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.*

(1) *Az X^* az első játékos optimális stratégiája* $\Longleftrightarrow v \le X^*A_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, n.$
(2) *Az Y^* a második játékos optimális stratégiája* $\Longleftrightarrow A_{i\cdot}Y^* \le v,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

14. Tétel (Tiszta vs. kevert tétel). *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.*

(1) *Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha*

$$A_{i\cdot}Y^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) *Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha*

$$X^*A_{\cdot j} > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.
Mivel Y^* a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az i-edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, a nyereménye kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:

$$A_{i\cdot}Y^* \le v, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Jelölje R, J a következő index halmazokat:

$$R = \{i : A_{i\cdot}Y^* < v\}, \quad J = \{i : A_{i\cdot}Y^* = v\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} v &= X^*AY^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^* A_{i\cdot}Y^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^* + \sum_{i \in J} x_i^* A_{i\cdot}Y^* \\ &= \sum_{i \in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^* + \sum_{i \in J} x_i^* v. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$v - \sum_{i \in J} x_i^* v = \sum_{i \in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^*,$$

$$v\Big(1-\sum_{i\in J}x_i^*\Big)=\sum_{i\in R}x_i^*A_{i\cdot}Y^*.$$

Mivel X^* komponensei valószínűségeket jelölnek, így $\sum_{i=1}^m x_i^*=1$. Továbbá R és J index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért $1-\sum_{i\in J}x_i^*=\sum_{i\in R}x_i^*$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$v\sum_{i\in R}x_i^*=\sum_{i\in R}x_i^*A_{i\cdot}Y^*\Rightarrow\sum_{i\in R}(v-A_{i\cdot}Y^*)x_i^*=0.$$

Mivel R mindenegyes i elemére $v-A_{i\cdot}Y^*>0$ ezért szükségképpen ezen i indexekre $x_i^*=0$. ∎

15. Megjegyzés. A 14. tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_{i\cdot}Y^*<v$ teljesül, azaz az első játékos az i. stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i. stragtégiát, vagyis $x_i^*=0$. A (2) hasonlóan foglamazható meg a második játékos j. startégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v-nél többet veszít a játékos.

A 13. tétele szerint $A_{i\cdot}Y^*\le v$. Viszont a 14. tétel alapján $x_i^*>0$ esetén nem teljesülhet a $<$ egyenlőtlenség, tehát ekkor $A_{i\cdot}Y^*=v$. Ezt fogalmazza meg az alábbi következmény.

16. Következmény. *Legyen az A egy $m\times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v, továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.*

(1) *Ha X^* i. komponensére $x_i^*>0$, akkor $A_{i\cdot}Y^*=v$.*
(2) *Ha Y^* j. komponensére $y_j^*>0$, akkor $X^*A_{\cdot j}=v$.*

Ezt a következményt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2-es és a 3×3-as mátrixjátékoknál.

2. A 2×2-es mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyeregpont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyeregpont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

1) $a<b,\ a<c,\ d<c,\ d<b$;
2) $a>b,\ a>c,\ d>c,\ d>b$.

Jelölje $X^*=\left(\begin{smallmatrix}x, & 1-x\end{smallmatrix}\right)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^*=\left(\begin{smallmatrix}y\\1-y\end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0<x<1,\quad 0<1-x<1,\quad 0<y<1,\quad 0<1-y<1.$$

Mivel az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla, a 16. Következmény felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^*A_{\cdot1}=v,\quad X^*A_{\cdot2}=v,\quad A_{1\cdot}Y^*=v,\quad A_{2\cdot}Y^*=v,$$

ahol v a játék értéke és $A_{\cdot1}$ az A mátrix első oszlopát, $A_{\cdot2}$ a második oszlopát, $A_{1\cdot}$ az első sorát, az $A_{2\cdot}$ pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$\left(\begin{smallmatrix}x&1-x\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a\\c\end{smallmatrix}\right)=v,\quad \left(\begin{smallmatrix}x&1-x\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}b\\d\end{smallmatrix}\right)=v,\quad \left(\begin{smallmatrix}a&b\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y\\1-y\end{smallmatrix}\right)=v,\quad \left(\begin{smallmatrix}c&d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y\\1-y\end{smallmatrix}\right)=v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}ax+c(1-x)&=v\\bx+d(1-x)&=v\\ay+b(1-y)&=v\\cy+d(1-y)&=v.\end{aligned}$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az x, míg a második két egyenletből megkaphatjuk az y-t. Továbbá x-et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, v-t:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d}, \quad v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az A mátrix determinánsa szerepel.

17. Példa. Megoldjuk meg a feladatsor **9. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A sorminimumok maximuma 4, az oszlop maximumok minimuma 5, így nincs nyeregpont, a játék értéke: $4 \le v \le 5$. Felhasználva a kevert stratégiákra vonatkozó korábbi formulákat:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{5-2}{6-4-2+5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{5-4}{6-4-2+5} = \frac{1}{5}.$$

Így az első játékos optimális stratégiája: $X^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, a második játékos optimális stratégiája: $Y^{*T} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. A játék értéke:

$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{30-8}{6-4-2+5} = \frac{22}{5}.$$

18. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **7.,8.** és **10.-12. feladatát**.

3. Mátrixjátékok megoldásának lépései

A mátrixjátékok megoldása az optimális sratégia megkeresését jelenti.

1. lépés: Nyeregpont keresése. Ha találunk nyeregpontot, akkor a hozzá tartozó stratégiák optimális stratégiát adnak. Ha nincs nyeregpont, akkor a 2. lépéssel folytatjuk.

2. lépés: Domináns sorok, oszlopok keresése. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa.

Az első játékos szempontjából a dominálás a következőt jelenti. Tekintsük a kifizetési mátrix i. és j. sorát:

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Ha az $a_{it} \le a_{jt}$, $t = 1, 2, \dots, n$, akkor a *j. sor dominálja az i. sort*, tehát az első játékos nem választja az i. stratégiát, mert azzal mindenképp rosszabbul járna, ez a stratégia elhagyható.

A második játékos szempontjából, ha a k. és l. oszlopát tekintjük a kifizetési mátrixnak:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots \\ a_{mk} & a_{ml} \end{pmatrix},$$

és $a_{tk} \le a_{tl}$, $t = 1, 2, \dots m$ teljesül, akkor a *k. oszlop dominálja az l. oszlopot*. A második játékos mindenképp többet veszítene, ha az l. oszlopot választaná, így az l. stratégia elhagyható.

3. lépés: Kevert stratégiák keresése.

19. Példa. Az alábbi mátrix egy 4×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Keressünk domináns sorokat és oszlopokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Az első sor dominálja a 3. sort, mert az 1. sor elemei nagyobbak, mint a 3. sor megfelelő elemei, tehát az első játékosnak nem éri meg a 3. stratégiáját használni. Az első oszlop dominálja a 5. oszlopot, illetve a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot, mert a domináns oszlopok komponensei kisebb vagy egyenlők, mint a dominált oszlop megfelelő komponensei. Így a második játékos nem használja a 4. és 5. stratégiáját. A dominált sorok és oszlopok elhagyásával a következő mátrixot kajuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

20. Megjegyzés. A $2 \times n$-es és $n \times 2$-es mátrixjátékok megoldására grafikus módszert alkalmazunk, lásd az előadáson.

4. A 3×3-as szimmetrikus mátrixjátékok megoldása

21. Definíció. Egy mátrixjátékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Legyen egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix ferdén szimmetrikus az 1. és 2. játékos optimális stratégiái megegyeznek, és a játék értéke $v = 0$.
A következő esetekben van nyeregpont:

(1) $a > 0$, $b > 0$, ekkor az $(1,1)$ nyeregpont,
(2) $a \leq 0$, $c \geq 0$, ekkor a $(2,2)$ nyeregpont,
(3) $b \leq 0$, $c \leq 0$, ekkor a $(3,3)$ nyeregpont.

Nincs nyeregpont, ha

(a) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$,
(b) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

Tekintsük az (a) esetet. Az Optimális stratégia tétele (13. Tétel) szerint az 1. játékosnak $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiája akkor és csakis akkor, ha $XA_{.j} \geq v = 0$, ahol $j = 1, 2, 3$. Ez a mátrix segítségével felírható:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0).$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -ax_2 - bx_3 &\geq 0 \\ ax_1 - cx_3 &\geq 0 \\ bx_1 + cx_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket átrendezve, figyelembe véve, hogy az (a) esetben a, $-b$, és c is pozitív, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{a} &\geq \frac{x_2}{-b} \\ \frac{x_1}{c} &\geq \frac{x_3}{a} \\ \frac{x_2}{-b} &\geq \frac{x_1}{c}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\frac{x_3}{a} \geq \frac{x_2}{-b} \geq \frac{x_1}{c} \geq \frac{x_3}{a}$, mivel az első és utolsó kifejezés megegyezik, ezért egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható. Jelöljük t-vel a hányadosok értékét: $\frac{x_3}{a} = \frac{x_2}{-b} = \frac{x_1}{c} = t$, tehát $x_1 = tc$, $x_2 = t(-b)$, $x_3 = ta$. Mivel x_1, x_2, x_3 a megfelelő stratégiák valószínűségét jelöli, így $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ teljesül, amelyből $t = \frac{1}{a-b+c}$ kifejezést kapjuk. A t helyébe ezt az összefüggést beírva az x_1, x_2, x_3 megadható.

A 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték esetén a játék értéke 0, valamint az 1. és a 2. játékos optimális stratégiája, ha $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$:

$$x_1 = \frac{c}{a-b+c}, \quad x_2 = \frac{-b}{a-b+c}, \quad x_3 = \frac{a}{a-b+c}.$$

A (b) esetben a mátrix 2., 3. sorának, majd 2., 3. oszlopának felcserélésével az (a) esethez jutunk.

22. Példa. Tekintsük a kő-papír-olló játék mátrixát. Mivel ez a mátrix az előző (b) esetnek felel meg, így végrehajtjuk a sor és oszlopcseréket, és használjuk a formulát.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, így $x_1 = \frac{1}{1-(-1)+1} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Az x_2 és x_3 értékét fel kell cserélni ahhoz, hogy az eredeti játékhoz tartozó valószínűségeket kapjuk (ezek most megegyeznek): $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

23. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **16.** és **17. feladatát**.

5. A 3×3-as mátrixjátékok megoldása

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét (16. Követekezmény). Továbbá mivel az x_i-k és az y_i-k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{i=1}^{3} y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \end{aligned} \tag{1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 > 0 \; y_2 > 0 \; y_3 > 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v). Az egyenletek és az ismeretlenek számát is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned} (a_{11}-a_{21})y_1 + (a_{12}-a_{22})y_2 + (a_{13}-a_{23})y_3 &= 0 \\ (a_{21}-a_{31})y_1 + (a_{22}-a_{32})y_2 + (a_{23}-a_{33})y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{lll} k_1 = a_{11} - a_{21} & k_2 = a_{12} - a_{22} & k_3 = a_{13} - a_{23} \\ k_4 = a_{21} - a_{31} & k_5 = a_{22} - a_{32} & k_6 = a_{23} - a_{33} \end{array}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned} k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 &= 0 \\ k_4y_1 + k_5y_2 + k_6y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D \neq 0$):

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ k_4 & 0 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_4 & k_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3. Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem tejesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét (16. Következmény) felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 > 0 \; x_2 > 0 \; x_3 > 0$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\ (a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = a_{11} - a_{12}, & \ell_2 = a_{21} - a_{22} & \ell_3 = a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 = a_{12} - a_{13} & \ell_5 = a_{22} - a_{23} & \ell_6 = a_{32} - a_{33} \end{array}.$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1x_1 + \ell_2x_2 + \ell_3x_3 &= 0 \\ \ell_4x_1 + \ell_5x_2 + \ell_6x_3 &= 0 \; . \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$D = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D-vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.
Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i-ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja. Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

4. lépés: Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a 3×3-as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot törültünk a játék mátrixából, akkor 2×3-as, 3×2-es illetve 2×2-es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3-as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3-as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékra.
Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3-as (vagy 3×2-es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3-as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.
Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3-as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele (13. Tétel) feltételeit a 3×3-as mátrixjátékra nézve.

24. Példa. Megoldjuk a feladatsor **19. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sorminimumok maximuma) 2, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 6, tehát a játék értéke $2 \leq v \leq 6$. Mivel a feladatban az szerepel, hogy az optimális stratégiák mindhárom komponense pozitív, így az előző algoritmus 3. lépésének (a) részével folytathatjuk. Felírjuk az (1) egyenletrendszernek megfelelő bővített mátrixot a 2. játékos optimális stratégiáira, és elvégezzük a kivonásokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 1 & v \\ 0 & 7 & 4 & v \\ 4 & 2 & 8 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 27 - (-36) + 18 = 81 \neq 0. \\ y_1 &= \tfrac{27}{81} = \tfrac{1}{3}, \quad y_2 = -\tfrac{-36}{81} = \tfrac{4}{9}, \quad y_3 = \tfrac{18}{81} = \tfrac{2}{9}, \qquad Y^T = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right). \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer speciális formájából adódik, hogy az egyes komponensek számlálójában épp a D determináns kiszámításakor megjelenő aldeterminánsok szerepelnek.

A játék értéke az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megkapható:

$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 4 = v.$$

Az első játékos optimális stratégiája hasonlóan számítható, csak az A helyett A^T szerepel a kezdeti egyenletrendszerben, $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

25. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **18., 20., 21. feladatát**. Figyeljünk arra, hogy nem minden esetben alkalmazható az algoritmus 3. lépése.

6. Diagonális játékok

26. Definíció. Ha egy mátrixjáték kifizetési mátrixa a következő alakú:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, akkor a játékot *diagonális mátrixjátéknak* (vagy röviden *diagonális játéknak*) nevezzük.

27. Megjegyzés. A diagonális mátrixjátékot lehet "keresési" játékként interpretálni. A második játékos elrejt egy tárgyat a szóbajöhető n hely valamelyikében. Amennyiben az első játékos megtalálja az elrejtett tárgyat, mégpedig a j-edik helyen, akkor nyereménye a_j, ha nem találja meg, akkor nyereménye 0.

28. Tétel. *Bármely diagonális játék esetén az első játékos optimális stratégiájának minden komponense pozitív, továbbá a játék értéke is pozitív.*

A diagonális játék megoldása

Mivel a 28. Tétel alapján az első játékos bármely optimális stratégiájának valamennyi komponense pozitív, ezért a Tiszta vs kevert tétel következménye szerint a második játékos bármely $Y^{*T} = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ optimális stratégiájára fennáll, hogy $A_{i\cdot}Y^* = v$. Mivel A diagonális, így

$$a_i y_i^* = v \quad (i = 1, \dots, n).$$

A diagonális mátrixjáték definíciója miatt $a_i > 0$ teljesül, így

$$y_i^* = v/a_i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{$\clubsuit$}$$

Az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = v \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Ahonnan figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 1$, megkapjuk a játék értékét:
$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$
Ha v-t (♣)-be behelyettesítjük akkor a második játékos optimális megoldásának komponenseit kitudjuk számítani:
$$y_i^* = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$
Vegyük észre, hogy a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív. A Tiszta vs kevert tétel következménye szerint ebből az következik, hogy az első játékos $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimális megoldására az $X^* A_{\cdot j} = v$ egyenlet áll fenn bármely $1 \leq j \leq n$-re. Tehát
$$X^* A_{\cdot j} = v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$
Mivel $a_j x_j^* = v$, így
$$x_j^* = \frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$
Látható, hogy a diagonális játéknak egyetlen optimális megoldása van, továbbá teljesül, hogy $X^* = Y^{*T}$.

29. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **22. feladatát**.