Véges fával ábrázolt játékok

Definíció: Egy játékot *véges fával ábrázolhatónak* nevezünk, ha hozzárendelhető egy olyan véges gyökeres irányított fa, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) A játék a gyökérnél kezdődik.
(2) A fa minden pontjához, ami nem levél, tarozik egy játékos, aki kiválaszthat az adott pontból kiinduló élek közül.
(3) Minden levélhez tartozik egy n-komponensű vektor, ahol n a játékosok száma. A vektor az egyes játékosok kifizetéseit adja meg.
(4) Minden játékos ismeri a fát, azaz tudja melyik csúcshoz van rendelve, és milyen kifizetések tartoznak az egyes levelekhez.

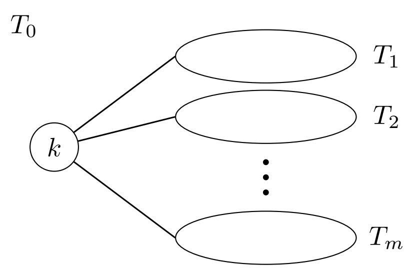
Tétel: Minden véges fával ábrázolt játéknak van legalább egy egyensúlyi pontja.

Bizonyítás: Legyen a játékosok száma n, a játékhoz tartozó fa pontjainak száma pedig M. A tételt M-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. lépés:
Ha a játékhoz tartozó fa 1 vagy 2 pontból áll ($M = 1$ vagy $M = 2$), akkor az állítás triviális. Ha $M = 3$ úgy, hogy a gyökérhez rendelt játékos két lehetőség közül választhat, akkor a számára kedvezőbbet választja, azaz a két levélhez tartozó n-komponensű vektornál összehasonlítja a rávonatkozó komponens értékét, és a maximális kifizetést választja. A kiválasztott levél lesz a játék egyensúlyi pontja.

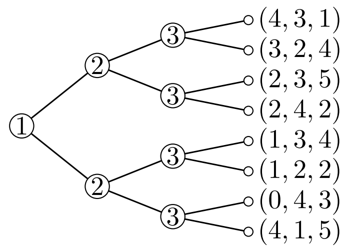
2. lépés:
Tegyük fel, hogy igaz az állítás azokban az esetekben, amikor a játékhoz rendelt fa pontjainak száma M-nél kevesebb.

3. lépés:
Legyen T_0 a játékhoz tartozó M pontú fa, bebizonyítjuk, hogy van egyensúlyi pontja. Tegyük fel, hogy a gyökérnél a k. játékos választ m lehetőség közül (lásd ábra).

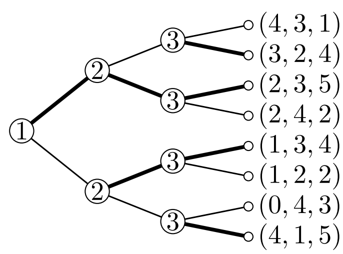


Ekkor a $T_1, T_2, \ldots, T_m$ részfáknak M-nél kevesebb pontja van, így az indukciós feltevés (2. lépés) szerint van egyensúlyi pontjuk. A k. játékos összehasonlítja ezeknél pontoknál a kifizetéseit, tehát ezen n-komponensű vektorok k. komponensét, és azt választja, ahol a kifizetése maximális, így megkapjuk T_0 egyensúlyi pontját.

Példa: Oldjuk meg a feladatsor **4.feladatát**.
Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyi pontját.



Ahogy a tétel bizonyításában is szerepel, a kisebb részfák egyensúlyi pontjai segítségével számoljuk a nagyobb részfa egyensúlyi pontját. A levelektől indulva először azt vizsgáljuk, hogy az utoljára soron következő játékos melyik lépést választaná az alapján, hogy mikor ér el magasabb kifizetést. Ezután az utolsó előttiként választó játékosok lépését vizsgáljuk az utolsó játékos választását figyelembe véve, így haladunk a gyökér felé. Az ábrán a levelektől indulva megvastagítottuk azokat az éleket, amelyeket az adott játékos választ, természetesen a korábbi döntéseket figyelembe véve.



Megvizsgáljuk, hogy a gyökérből indulva, vastag éleken haladva melyik pontba jutunk, így a fával ábrázolt játék egyensúlyi pontja a $(2, 3, 5)$ kifizetésekhez tartozó pont.