

## Diagonális játékok

**1. Definíció.** Ha egy mátrixjáték kifizetési mátrixa a következő alakú:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

ahol  $a_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), akkor a játékot *diagonális mátrixjátéknak* (vagy röviden *diagonális játéknak*) nevezzük.

**2. Megjegyzés.** A diagonális mátrixjátékot lehet "keresési" játékként interpretálni. A második játékos elrejt egy tárgyat a szóbjöhető  $n$  hely valamelyikében. Amennyiben az első játékos megtalálja az elrejtett tárgyat, mégpedig a  $j$ -edik helyen, akkor nyereménye  $a_j$ , ha nem találja meg, akkor nyereménye 0.

**3. Tétel.** *Bármely diagonális játék esetén az első játékos optimális stratégiájának minden komponense pozitív, továbbá a játék értéke is pozitív.*

### A diagonális játék megoldása

Mivel a 3. Tétel alapján az első játékos bármely optimális stratégiájának valamennyi komponense pozitív, ezért a Tiszta vs kevert tétel következménye szerint a második játékos bármely  $Y^{*T} = (y_1^*, \dots, y_n^*)$  optimális stratégiájára fennáll, hogy  $A_i \cdot Y^* = v$ . Mivel  $A$  diagonális, így

$$a_i y_i^* = v \quad (i = 1, \dots, n).$$

A diagonális mátrixjáték definíciója miatt  $a_i > 0$  teljesül, így

$$y_i^* = v/a_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\clubsuit)$$

Az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=1}^n y_i = v \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Ahonnán figyelembe véve, hogy  $\sum_{i=1}^n y_i^* = 1$ , megkapjuk a játék értékét:

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1/a_k}.$$

Ha  $v$ -t ( $\clubsuit$ )-be behelyettesítjük akkor a második játékos optimális megoldásának komponenseit kitudjuk számítani:

$$y_i^* = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1/a_k}.$$

Vegyük észre, hogy a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív. A Tiszta vs kevert tétel következménye szerint ebből az következik, hogy az első játékos  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  optimális megoldására az  $X^* A_j = v$  egyenlet áll fenn bármely  $1 \leq j \leq n$ -re. Tehát

$$X^* A_j = v = \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1/a_k}.$$

Mivel  $a_j x_j^* = v$ , így

$$x_j^* = \frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1/a_k}.$$

Látható, hogy a diagonális játéknak egyetlen optimális megoldása van, továbbá teljesül, hogy  $X^* = Y^{*T}$ .

**4. Feladat.** Oldjuk meg a feladatsor **22. feladatát**.