

(előadásjegyzet, 2022. március 31.)

1. Definíció. Két mátrixjáték *stratégiaileg ekvivalens*, ha az optimális stratégiák a két mátrixjátéknál megegyeznek.

Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke. Az előző tétel alapján feltehetjük, hogy $a_{ij} > 0$, ekkor $v > 0$ is teljesül.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n & \leq & v \\ & \vdots & \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n & \leq & v \\ & y_1, y_2, \dots, y_n & \geq 0 \\ & y_1 + y_2 + \dots + y_n & = 1 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n & \leq & 1 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \dots + a_{mn}y'_n & \leq & 1 \\ & y'_1, y'_2, \dots, y'_n & \geq 0 \\ \hline & y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n & \rightarrow \max. \end{array}$$

Az Optimális stratégia tétele szerint, ha az X az első játékos optimális stratégiája, akkor $v \leq XA_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ebből az előzőhöz hasonló egyenlőtlenségrendszer adódik, annyi különbséggel, hogy A helyett A^T szerepel, továbbá $\leq$ helyett $\geq$. A v -vel való osztás után a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{m1}x'_m & \geq & 1 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{nm}x'_m & \geq & 1 \\ & x'_1, x'_2, \dots, x'_m & \geq 0 \\ \hline & x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m & \rightarrow \min, \end{array}$$

3. Definíció. (Dualitás) *Primál feladatnak* nevezzük a következőt:

$$\frac{\begin{array}{l} \underline{Ay} \leq \underline{b} \\ \underline{y} \geq \underline{0} \end{array}}{\underline{cy} \rightarrow \max.}$$

$$\frac{\begin{array}{rcl} \underline{x}A & \geq & \underline{c} \\ \underline{x} & \geq & \underline{0} \end{array}}{\underline{x}b \rightarrow \min.}$$

2. lépés: Az 1. lépés átalakításai után csak $=$ és $\leq$ szerepel. A *táblázatot* úgy készítjük el, hogy ahol egyenlőség van, ott a kiemelt változókat *-gal jelöljük, ezek a mesterséges változók. A cél az, hogy a mesterséges változók 0 értéket vegyenek fel, azaz a táblázat felső sorába kerüljenek. Ha felkerültek, nem szabad visszahozni, így az oszlopukat el is hagyjuk a táblázatból. Kialakítunk egy *másodlagos célfüggvényt* is, ami úgy keletkezik, hogy az egyenlőség jellegű kifejezések megfelelő együtthatóit összeadjuk (azaz azokban a sorokban adjuk össze, ahol a *-gal jelölt változók szerepelnek). A sarokelemet úgy kapjuk, hogy a jobboldali konstansokat összeadjuk ezekben a sorokban. A táblázat elkészítését mutatja a lenti példa.

3. lépés: Az *első fázisban* a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk (ld. Szimplex algoritmus). Ha a másodlagos célfüggvény szerinti optimumnál a másodlagos sarokelem nem nulla, akkor nincs a feladatnak lehetséges megoldása. Ha a másodlagos sarokelem 0, és *-os változók már nem szerepelnek, akkor következhet az 4. lépés (második fázis). Ha maradtak *-os változók, akkor akár negatív generáloelem is választható ahhoz, hogy a felső sorba kerüljenek, és elhagyjuk őket. Abban az esetben, ha már csak 0 van a *-os változó sorában, akkor elhagyható az egész sor.

4. lépés: A *második fázisban* az elsődleges célfüggvény szerint keressük meg az optimális megoldást (ld. Szimplex algoritmus).

7. Példa. Az 1. és 2. lépést megmutatjuk egy példán keresztül.

$$\begin{array}{rclcl}
 -x_1 - x_2 - x_3 & \geq & -10 & & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\
 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 & & 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\
 x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq & 4 & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - v_1 & = & 4 \\
 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 & \Leftrightarrow & 2x_1 + x_2 + x_3 - v_2 & = & 2 \\
 x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & & x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 & \geq & 0 \\
 \hline
 -x_1 - 2x_2 - 4x_3 & \rightarrow & \min & & x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \rightarrow & \max
 \end{array}$$

A szimplex táblázat:

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
u_1	1	1	1	0	0	10
u_2^*	2	1	4	0	0	12
u_3^*	1	2	2	-1	0	4
u_4^*	2	1	1	0	-1	2
	1	2	4	0	0	0
	5	4	7	-1	-1	18

8. Példa. Megoldjuk a feladatsor **30. feladatát**.

Az alábbi mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az első játékos optimális stratégiáját kétfázisú módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Az Optimális stratégia tétele alapján, ha $X = (x_1, x_2)$ az első játékos optimális stratégiája, akkor

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \geq (v, v)$$

teljesül, amelyből a következő egyenlőtlenségrendszer írható fel:

$$\begin{array}{rcl}
 3x_1 + x_2 & \geq & v \\
 2x_1 + 6x_2 & \geq & v \\
 x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 x_1 + x_2 & = & 1.
 \end{array}$$

Mivel a mátrix minden eleme pozitív, így v , a játék értéke is pozitív. A v -vel történő osztás, és $x'_1 = \frac{x_1}{v}$, $x'_2 = \frac{x_2}{v}$ helyettesítés után a következő lineáris programozási feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{rcl} 3x'_1 + x'_2 & \geq & 1 \\ 2x'_1 + 6x'_2 & \geq & 1 \\ x'_1, x'_2 & \geq & 0 \\ \hline x'_1 + x'_2 = \frac{1}{v} & \rightarrow & \min. \end{array}$$

A kétfázisú módszer 1. lépését elvégezve a következő feladathoz jutunk:

$$\begin{array}{rcl} 3x'_1 + x'_2 - v_1 & = & 1 \\ 2x'_1 + 6x'_2 - v_2 & = & 1 \\ x'_1, x'_2 & \geq & 0 \\ \hline -x'_1 - x'_2 & \rightarrow & \max. \end{array}$$

Végrehajtjuk a kétfázisú módszer lépéseit:

	x'_1	x'_2	v_1	v_2			x'_1	v_1	v_2			v_1	v_2	
u_1^*	3	1	-1	0	1	u_1^*	$\frac{8}{3}$	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	x'_1			$\frac{5}{16}$
u_2^*	2	6*	0	-1	1	x'_2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{6}$	x'_2			$\frac{1}{16}$
	-1	-1	0	0	0		$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
	5	7	-1	-1	2		$\frac{8}{3}$	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$		0	0	0

Ahol a bázismegoldás optimális: $x'_1 = \frac{5}{16}$, $x'_2 = \frac{1}{16}$, $z = -\frac{3}{8}$, ahonnan $v = \frac{8}{3}$, így $x_1 = \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{6}$, tehát az első játékos optimális stratégiája $X = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.