Játékelmélet

2. zh mintafeladatok

TUDNIVALÓK

- Aki a dolgozatot meg szeretné írni, annak **CooSpace-en jelentkezni** kell, a jelentkezés május 2-án indul.
- **A zárthelyi dolgozatban 5-6 feladat lesz.**
- A mintafeladatoknál szereplő **pontszámok tájékozató jellegűek**.
- Tollon, ceruzán és vonalzón kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- A feladatok megoldására 45 **perc** áll rendelkezésre.

1. (3 pont) Írja le, hogyan zajlik az angol, a holland árverés és a Vickrey-aukció.

2. (5 pont) Bizonyítsa be a Vickrey-aukcióra vonatkozó tételt.

3. (3 pont) Definiálja a kooperatív játékok stratégiai ekvivalenciáját.

4. (5 pont) Bizonyítsa be a $(0, 1)$-normalizált kooperatív játékról szóló tételt.

5. (3 pont) Adja meg az elosztás definícióját kooperatív játékok esetén.

6. (5 pont) Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & & +x_3 & \leq & 2 \\
 & x_2 & +2x_3 & \leq & 1 \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\
\hline
3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \to & \max
\end{array}$$

7. (5 pont) Az alábbi mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját **lineáris programozás** segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (5 pont) Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáit és a hozzá tartozó kifizetéseket annál a 2×2-es bimátrixjátéknál, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza. (Az utolsó oldalon található segítség.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. (4 pont) Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 20 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ z \succ u \succ y$: 8 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 7 szavazónál,
- $y \succ z \succ u \succ x$: 5 szavazónál.

Határozza meg, hogy a Borda-pontozás alapján mi a közös sorrend.

10. (4 pont) Végezzen $(0, 1)$-normalizációt az (N, v) 5-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| = 1; \\ 3, & \text{ha } |S| = 2; \\ 5, & \text{ha } |S| = 3; \\ 8, & \text{ha } |S| = 4; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

11. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 5, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 12, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 7, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 20, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg a játékhoz tartozó Shapley-értéket.
(A $\Phi(v)$ Shapley-érték komponensei a következő módon számolhatók: $\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \gamma(|S|) \left(v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right)$, ahol ha az S halmaz 1-elemű vagy 3-elemű, akkor $\gamma(|S|) = \frac{1}{3}$, ha S 2-elemű, akkor $\gamma(|S|) = \frac{1}{6}$.)

12. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a szuperadditív karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 3, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg az elosztások halmazát és a játék magját.

A 2×2-es bimátrixjátékok

Egy 2×2-es bimátrixjáték esetén legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix az első játékos, az $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos kifizetési mátrixa. Az első játékos optimális stratégiája legyen $X = (x, 1-x)$, a második játékos optimális stratégiája pedig $Y^T = (y, 1-y)$. Jelölés: $Q = a - b - c + d$, $\quad q = d - b$, $\quad R = a' - b' - c' + d'$, $\quad r = d' - c'$.

(i) $Q = 0$,

(a) $q = 0: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

(b) $q > 0: \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$

(c) $q < 0: \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$

(ii) $Q > 0$,

(a) $\quad x = 0, \quad y \leq \frac{q}{Q};$

(b) $\quad x = 1, \quad y \geq \frac{q}{Q};$

(c) $\quad 0 < x < 1, \quad y = \frac{q}{Q}.$

(iii) $Q < 0$,

(a) $\quad x = 0, \quad y \geq \frac{q}{Q};$

(b) $\quad x = 1, \quad y \leq \frac{q}{Q};$

(c) $\quad 0 < x < 1, \quad y = \frac{q}{Q}.$

(iv) $R = 0$,

(a) $r = 0: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

(b) $r > 0: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0;$

(c) $r < 0: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y = 1.$

(v) $R > 0$,

(a) $\quad x \leq \frac{r}{R}, \quad y = 0;$

(b) $\quad x \geq \frac{r}{R}, \quad y = 1;$

(c) $\quad x = \frac{r}{R}, \quad 0 < y < 1.$

(vi) $R < 0$,

(a) $\quad x \geq \frac{r}{R}, \quad y = 0;$

(b) $\quad x \leq \frac{r}{R}, \quad y = 1;$

(c) $\quad x = \frac{r}{R}, \quad 0 < y < 1.$