

Mátrixjátékok - alapfogalmak, tételek

(előadásjegyzet, 2022. február 17.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Definíció. A játékoknál az egyes stratégiákhoz tartozó nyereményeket *kifizetési függvények* adják meg, a függvények által megadott valós számokat *kifizetéseknek* nevezzük.

2. Definíció. Egy játéknak a játékosok adott stratégiái esetén (Nash-féle) *egyensúlyi helyzete* van, ha minden játékos esetén teljesül, hogy egyoldalúan változtatva a stratégiáján nem érne el nagyobb kifizetést.

3. Definíció. A játékot *nullaösszegűnek* nevezzük, ha az egyes játékosok nyereménye a többi játékos vesztesége. Azaz, ha az összes játékos kifizetéseit összegezzük, akkor 0-át kapunk.

4. Definíció. Minden véges kétszemélyes nullaösszegű játéknál a stratégiapárokhoz tartozó kifizetéseket táblázatban, azaz mátrixban ábrázolhatjuk, ezért az ilyen típusú játékokat *mátrixjátékoknak* nevezzük.

5. Definíció. Ha egy mátrixjáték esetén az 1. játékosnak m stratégiája van, a 2. játékosnak pedig n , akkor az 1. játékos kifizetéseit egy $m \times n$ -es A valós mátrix elemeiként ábrázolhatjuk. Ezt az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixot nevezzük a *játék kifizetési mátrixának*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i . sorának j . eleme a_{ij} , az az érték, amit az 1. játékos nyer, ha ő az i . stratégiájával játszik, a 2. játékos pedig a j . stratégiájával. Ekkor a 2. játékos kifizetése $-a_{ij}$, ugyanis a játék nullaösszegű. Ha $a_{ij} > 0$, akkor erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij} -t fizet az 1. játékosnak.

6. Definíció. Ha a mátrixjáték kifizetési mátrixa A , akkor az A mátrix sorminimumainak maximumát *alsóértéknek*, az oszlopmaximumainak minimumát pedig *felsőértéknek* nevezzük. Az alsóérték kisebb vagy egyenlő a felsőértéknél, ha az egyenlőség teljesül, *nyeregpont-ról* beszélünk.

7. Tétel. *Mátrixjátékok bármely két nyeregpontja azonos értékű.*

8. Tétel (Minimax tétel). *Bármely mátrixjátéknak van egyensúlyi helyzete.*

9. Definíció. Ha a játékos csak az egyik stratégiájával játszik, és a többi nem használja, akkor ezt *tiszta stratégiának* nevezzük, különben *kevert stratégiának*.

Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Az 1. játékos stratégiáinak S_1 halmaza az összes olyan m -komponensű $X = (x_1, \dots, x_m)$ vektor, amelyre $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) és $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. A 2. játékos esetén pedig az n -komponensű $Y^T = (y_1, \dots, y_n)$ vektorok halmaza, amelyre $y_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) és $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Azaz az 1. játékos x_i valószínűséggel játsza az i . stratégiáját, és a 2. játékos y_j valószínűséggel a j . stratégiáját. Ekkor az 1. játékos várható kifizetése:

$$XAY = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

10. Definíció. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. A mátrixjátéknak $X^* \in S_1$ és $Y^* \in S_2$ *egyensúlyi helyzete* (*optimális stratégiája*), ha

$$XAY^* \leq X^*AY^* \leq X^*AY,$$

tetszőleges $X \in S_1$, $Y \in S_2$ esetén. Azaz egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni, az 1. játékos nem nyerne többet, a 2. játékos pedig nem veszítene kevesebbet, ha az egyensúlyi helyzettől eltérne.

11. Definíció. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és X^* , Y^* optimális stratégiája, ekkor a $v = X^*AY^*$ egyensúlyi helyzetben elért várható kifizetést a *játék értékének* nevezzük.

12. Jelölés. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrix, ekkor jelölje A_i az A mátrix i . sorvektorát, ahol $i \in \{1, \dots, m\}$. A_j pedig jelölje az A mátrix j . oszlopvektorát tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

Ha A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az XA_j a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j . tiszta stratégiát. Hasonlóan az A_iY kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i . tiszta stratégiát.

13. Tétel (Tiszta vs. kevert tétel). Legyen A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha

$$A_iY^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha

$$X^*A_j > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

A tételt a következő előadáson bizonyítjuk.

14. Megjegyzés. A 13. tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_iY^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i . stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i . stratégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan fogalmazható meg a második játékos j . stratégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v -nél többet veszít a játékos.

Az optimális stratégia definíciójából $A_iY^* \leq v$ következik. Viszont a 13. tétel alapján $x_i^* > 0$ esetén nem teljesülhet a $<$ egyenlőtlenség, tehát ekkor $A_iY^* = v$. Ezt fogalmazza meg az alábbi következmény.

15. Következmény. Legyen az A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v , továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.

(1) Ha X^* i . komponensére $x_i^* > 0$, akkor $A_iY^* = v$.

(2) Ha Y^* j . komponensére $y_j^* > 0$, akkor $X^*A_j = v$.

Ezt a következményt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2 -es és a 3×3 -as mátrixjátékoknál.