

Kooperatív játékok (1. rész)

(előadásjegyzet, 2022. április 26.)

Kátai-Urbán Kamilla

Neumann János és Oscar Morgenstern az n -személyes kooperatív játékok vizsgálatánál a racionális osztozkodás törvényeit tanulmányozták.

1. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza. Az $S \subseteq N$ halmazt *koalíciónak* nevezzük, azaz $S \in \mathcal{P}(N)$, ahol $\mathcal{P}(N)$ az N hatványhalmazát jelöli (N összes részhalmazának halmaza).

2. Definíció. A $v: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést *karakterisztikus függvénynek* nevezzük. Tetszőleges $S \in \mathcal{P}(N)$ esetén a $v(S)$ az a kifizetés, amit az S -ben lévő játékosok összefogva elérnek, a $v(\emptyset) = 0$ egyenlőségnek tetszőleges v karakterisztikus függvény esetén teljesülnie kell. (Az $\emptyset$ -ra vonatkozó értéket sok esetben ki se írjuk.)

3. Jelölés. (N, v) azt az n -személyes kooperatív játékot jelöli, ahol $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza, a v pedig a játékhoz tartozó karakterisztikus függvény.

4. Példa. Megoldjuk a feladatsor **38. feladatát**.

A csongrádi fitness egyesületben Judit az edző. Ha egyedül tartja az edzéseket, akkor a heti haszna 6 ezer forint. Elgondolkozik azon, hogy felvehetne maga mellé egy vagy két segédedzőt, és akkor többet járhatnának a gyerekek edzésekre. Ha csak Ancsát veszi fel maga mellé, akkor 16 ezer forint lenne a haszon, ha csak Fannit, akkor 26 ezer forint lenne. Ha mindkettőjüket felveszi, akkor 36 ezer forint lenne a haszon. Ancsa és Fanni külön-külön nem alakítana egyesületet, de ha együtt alakítanak, akkor 6 ezer forint lenne a hasznuk. Határozza meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

A játék résztvevőit a következőképpen jelöljük, 1: Judit, 2: Ancsa, 3: Fanni. Tehát a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$, a feladat szövege alapján a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

5. Feladat. Oldja meg a feladatsor **39. feladatát**.

1. SZAVAZÁSOK

A társadalmi választások elmélete a következő kérdésekkel foglalkozik.

- Hogyan tud emberek egy csoportja közös döntésre jutni?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezzenek a választási rendszerek?
- Mikor lesz egy választási rendszer demokratikus?
- Hogyan lesz az egyéni sorrendekből közös sorrend?

A következőkben néhány szavazási rendszerrel ismerkedünk meg. *Alternatíváknak* nevezzük azokat a dolgokat, amelyekre szavazni lehet.

6. Jelölés. Az alternatívák halmazát jelölje A .

7. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *többségi szavazásnál két alternatíva esetén*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| > \frac{n}{2}; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Előfordulhat, hogy egyes szavazóknak több szavazata van, tehát a szavazóknak más a súlya, így jutunk a következő szavazási formához.

8. Definíció. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$, és w_i jelölje, hogy az i . szavazónak mennyi szavazata van, továbbá q jelöli, hogy hány szavazatot kell elérni. Ha az $S \subseteq N$ koalíció nyer, akkor legyen $v(S) = 1$, különben a karakterisztikus függvény értéke 0. A karakterisztikus függvény *súlyozott többségi szavazás esetén két alternatívánál*:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jele: $(q; w_1, w_2 \dots w_n)$.

9. Feladat. Oldja meg a feladatsor **40.** és **41. feladatát**.