

Véges fákkal ábrázolt játékok

1. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1-fokú pontja van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

Megoldás.

- (a) 2 és 18 között bármely egész értéket felvehet.
- (b) 3.
- (c) 9.

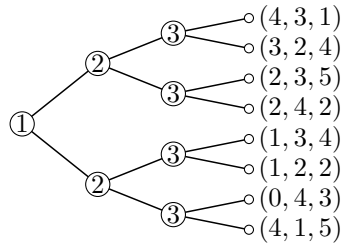
2. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

Megoldás. Egy n pontú fának $n - 1$ éle van, azaz az erdő minden fa-komponensének 1-gyel több pontja van, mint éle, így 21 pont van.

3. Feladat. A síkban adott 14 különböző pont. Andi és Balázs felváltva kötnek össze két különböző pontot egy éllel. A játék kezdetén semelyik két pont sincs összekötve, az első élt Andi rajzolja. Az veszít, aki olyan élt rajzol be, amellyel a gráfban keletkezik kör. Milyen esélye van Andinak, illetve Balázsnak, hogy nyerjen?

Megoldás. Egy n pontú fának $n - 1$ éle van, tehát 13 élt lehet behúzni, anélkül, hogy kört kapnának, az utolsó élt Andi húzza be.

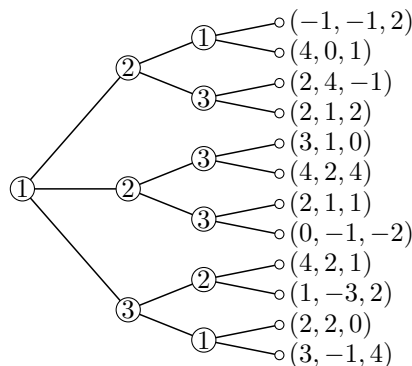
4. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.



Megoldás. (Ld. előadásvázlat.) Az egyensúly a $(2, 3, 5)$.

5. Feladat. Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.

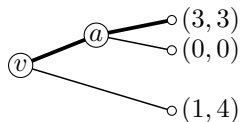
¹Ha a feladat sorszáma mellett az szerepel, hogy *kidolgozott feladat*, akkor a részletes megoldása megtalálható a megfelelő előadás vázlatban.



Megoldás. Figyeljünk, hogy melyik pontban melyik játékos választ. Az egyensúlya a $(4, 2, 4)$.

6. Feladat. Egy áruházlánc ellenőrzése alatt tart egy piacot, amire belép egy vállalkozó. Az áruházláncnak két stratégiája van: engedi, hogy a vállalkozó a piacon maradjon vagy kiszorítja. A vállalkozó stratégiái: megmarad a piacon vagy kilép. Az egyes kifizetések a következők: ha a vállalkozó kilép, akkor az áruházlánc nyeresége 4 egység a vállalkozóé 1 egység. Ha a vállalkozó nem lép ki a piacról, de az áruházlánc utána kiszorítja, akkor nem nyernek semmit, ha nem szorítja ki, akkor mindkét szereplő 3-3 egységet nyer. Adja meg a problémához tartozó véges gyökeres fát, és határozza meg az egyensúlyát.

Megoldás. A vállalkozót jelölje v , az áruházláncot a , ekkor a problémához tartozó véges gyökeres fa:



Az egyensúlyi pont a $(3, 3)$, azaz az a vállalkozó nem lép ki a piacról, és az áruházlánc nem szorítja ki.

A $2 \times n$ -es és $n \times 2$ -es mátrixjátékok

7. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Létezik nyeregpont, mivel a sorminimumok maximuma megegyezik az oszlop-maximumok minimumával. Az első játékos a 2. stratégiájával játszik, a második játékos pedig az 1. stratégiával, a játék értéke $v = 2$.

8. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2 -es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, a második optimális stratégiája: $Y^T = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$, a játék értéke $v = \frac{9}{5}$.

9. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Nincs nyeregpont, alkalmazzuk a 2×2 -es mátrixjátékokra vonatkozó formulát. Az első játékos optimális stratégiája: $X = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, a második optimális stratégiája: $Y^T = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, a játék értéke $v = \frac{22}{5}$.

10. Feladat. Andi és Balázs szócsatát játszik. Andi az a , $\tilde{u}$, míg Balázs az r , z , d betűkből választ egyet-egyet egyszerre. Ha Andi olyan értelmes szót tud alkotni a kiválasztott két betűből, ami nem ige, akkor 1 Ft-ot kap Balázstól, ha ige, akkor 5 Ft-ot kap, ha nem tud értelmes szót alkotni, akkor Balázs kap 3 Ft-ot Anditól. Adja meg a játék kifizetési mátrixát. Határozza meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

Megoldás. A játék kifizetési mátrixa:

	r	z	d
a	-3	1	5
$\tilde{u}$	1	5	-3

Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $Y^T = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$. A játék értéke $v = -\frac{1}{3}$.

11. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5 -ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0)$. A játék értéke $v = 3$.

12. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5 -ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás miatt 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{7}, \frac{6}{7})$, $Y^T = (\frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7}, 0, 0)$. A játék értéke $v = \frac{6}{7}$.

13. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $Y^T = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$.

14. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y^T = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

15. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 5×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Grafikus módszerrel 2×2 -es mátrixjátékokra visszavezethető. Az optimális stratégiák az eredeti játékokra: $X = (0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$, $Y^T = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

A 3×3 -as mátrixjátékok

16. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $v = 0$.

17. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Alakítsa át a mátrixot úgy, hogy egy szimmetrikus mátrixjátékot kapjon. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$, $v = 0$.

18. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Dominálás van a sorok és az oszlopok között is (az algoritmus 2. lépése), 2×2 -es mátrixjáték megoldására vezet. $X = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $Y^T = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, $v = \frac{5}{3}$.

19. Feladat. (Kidolgozott feladat.) Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3})$, $Y^T = (\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9})$, $v = 4$.

20. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 3. lépését alkalmazzuk. $X = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5})$, $Y^T = (\frac{19}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{15})$, $v = \frac{23}{5}$.

21. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az algoritmus 4. lépését alkalmazzuk. Az első játékos 1. stratégiáját elhagyva visszavezethetjük 2×3 -as játékokra, az Optimális stratégia tételével ellenőrizzük, hogy az optimális megoldást kaptuk-e. $X = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, $Y^T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $v = \frac{14}{3}$.

Diagonális játékok

22. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 4×4 -es diagonális mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = (\frac{10}{39}, \frac{5}{39}, \frac{4}{39}, \frac{20}{39})$, $v = \frac{20}{39}$.

Lineáris programozás és a mátrixjátékok

23. Feladat. Számolja ki a következő mátrix inverzét elemi bázistranszformáció segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás.
$$\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($y_1, y_2, y_3 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrcr} & y_2 & +3y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 5 \\ 2y_1 & & +y_3 & \leq & 2 \\ \hline 2y_1 & +4y_2 & +y_3 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Megoldás. $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, z = 6$.

25. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($y_1, y_2 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrcr} & y_1 - y_2 & \leq & 3 \\ 2y_1 - 3y_2 & \leq & 8 \\ \hline 2y_1 + y_2 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Megoldás. Elemi bázistranszformáció után a szimplex algoritmus 2. lépése teljesül, a célfüggvény felülről nem korlátos.

26. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrcr} & y_1 - y_5 & \leq & 20 \\ & y_1 + y_3 & \leq & 30 \\ & y_1 + y_2 + y_4 & \leq & 10 \\ & y_2 - y_3 - y_4 + y_5 & \leq & 0 \\ \hline y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Megoldás. $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 30, y_4 = 10, y_5 = 40, z = 330$.

27. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $Y^T = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}), v = \frac{15}{7}$.

28. Feladat. Az alábbi mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $Y^T = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), v = \frac{10}{4}$.

29. Feladat. Oldja meg a feladatot kétfázisú módszer segítségével. ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq & 10 \\ \hline x_1 & +x_2 & +x_3 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Megoldás. $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $z = 8$.

30. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az alábbi mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az első játékos optimális stratégiáját kétfázisú módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.

Bimátrixjátékok, gazdasági alkalmazások

31. Feladat. Oldja meg azt a 2×2 -es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, az $x = 0$, $y = 0$ értékek tartoznak az egyensúlyi ponthoz, így $X = (0, 1)$, $Y^T = (0, 1)$, azaz mindkét játékos a második tiszta stratégiájával játszik. A játékosok kifizetése: $E_1(0, 0) = 4$, $E_2(0, 0) = 5$.

32. Feladat. Oldja meg azt a 2×2 -es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

- (1) $x = 0$, $y = 1$: $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 5$, $E_2(0, 1) = 3$;
- (2) $x = 1$, $y = 0$: $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(1, 0) = 3$, $E_2(1, 0) = 4$;
- (3) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{5}$: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y^T = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, $E_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) = \frac{13}{5}$, $E_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) = \frac{5}{2}$.

33. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) (*Ajándékozási-dilemma*) A Young házaspárnak mindössze két kincse van, Jim családi örökségéből származó aranyórája és Della szép, hosszú haja. Karácsonyra meg akarják lepni egymást valami szép ajándékkal. Tudják egymásról, hogy mire vágnak; Jim egy óraláncra, Della pedig egy fésűs csatra. Mivel szegények, ezért pénzt csak a meglévő kincsük eladásával tudnak szerezni, de ezzel értéküket veszítik az ajándékok is. Ha mindketten eladják az értékeiket, akkor annak a szituációnak az értéke legyen 0. Az ajándékozás örömet értékeljük 2 egységgel, a megajándékozott örömet 1 egységgel. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

- (1) $x = 0$, $y = 1$: $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$;
- (2) $x = 1$, $y = 0$: $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(1, 0) = 2$, $E_2(1, 0) = 1$;

$$(3) \ x = y = \frac{2}{3}: X = Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

34. Feladat. (*Fogoly-dilemma*) Két férfit fegyveres rablással gyanúsítanak, nincs döntő bizonyíték ellenük, de ők ezt nem tudják. A rendőr felajánlja mindkettőjüknek, hogy ha bevallja a rablást, de a másik tagad, akkor a beismerő vallomást tevő rabot felmentik, a tagadó rab 20 évet kap. Ha mindketten vallanak, akkor az enyhítő körülmény, így 5-5 évet kapnak. Ha mindketten tagadnak, akkor a rájuk bizonyítható tiltott fegyverviselésért 1-1 évet kapnak. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -20 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -5 & -20 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az $x = 1, y = 1$ egyensúlyi pont, azaz mindkét játékos az első stratégiáját választja, tehát vallanak, egyensúlyi pont: $X = Y^T = (1, 0)$, a kifizetések: $E_1(1, 1) = E_2(1, 1) = -5$.

35. Feladat. (*Családi vita*) Egy fiatal házaspár este szórakozni akar menni. A férfi egy ökölvívó mérőzést szeretne megnézni, a nő pedig színházba szeretne menni. Nem tudják előre megbeszélni, de csak akkor mennek el valahova, ha ugyanazt választják. Ha odamennek, amit szeretnének, annak legyen 2 egység az értéke, ha nem odamennek, annak 1 egység, ha pedig otthon maradnak, annak -1 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

- (1) $x = y = 0: X = Y^T = (0, 1), E_1(0, 0) = 2, E_2(0, 0) = 1;$
- (2) $x = y = 1: X = Y^T = (1, 0), E_1(1, 1) = 1, E_2(1, 1) = 2;$
- (3) $x = \frac{2}{5}, y = \frac{3}{5}: X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), Y^T = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), E_1\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) = E_2\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}.$

36. Feladat. (*Duopólium*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. Mindkét cég kétféle árajánlatot tehet, magasat vagy alacsonyat. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyat ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabbat fogják választani a vásárlók, így annak vállalatnak a profitja legyen 14 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az $x = 0, y = 0$ egyensúlyi pont, azaz mindkét vállalat a második stratégiáját választja, tehát alacsony árat ajánlanak, egyensúlyi pont: $X = Y^T = (0, 1)$, a kifizetések: $E_1(1, 1) = E_2(1, 1) = 7$.

37. Feladat. (*Legnagyobb kedvezmény elve*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. A vállalatok szerződésben garantálják a vevőknek, hogyha a jövőben másnak alacsonyabb árat ajánlanak, akkor a tőle kért árat is erre az alacsonyabb szintre szállítják

le. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyát ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabb árat ajánló vállalatnak az árgaranciákat is be kell váltani, így annak vállalatnak a profitja legyen 9 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Megoldás. A kifizetési mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a bimátrixjátékok megoldásánál megadott feltételeket, a következő egyensúlyi pontokat kapjuk:

- (1) $x = y = 0$: $X = Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 0) = E_2(0, 0) = 7$;
- (2) $x = y = 1$: $X = Y^T = (1, 0)$, $E_1(1, 1) = E_2(1, 1) = 10$;
- (3) $x = y = \frac{8}{9}$: $X = Y^T = (\frac{8}{9}, \frac{1}{9})$, $E_1(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}) = E_2(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}) = 8\frac{7}{9}$.

Kooperatív játékok

38. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) A csongrádi fitness egyesületben Judit az edző. Ha egyedül tartja az edzéseket, akkor a heti haszna 6 ezer forint. Elgondolkozik azon, hogy felvehetne maga mellé egy vagy két segédedzőt, és akkor többet járhatnának a gyerekek edzésekre. Ha csak Ancsát veszi fel maga mellé, akkor 16 ezer forint lenne a haszon, ha csak Fannit, akkor 26 ezer forint lenne. Ha mindkettőjüket felveszi, akkor 36 ezer forint lenne a haszon. Ancsa és Fanni külön-külön nem alakítana egyesületet, de ha együtt alakítanak, akkor 6 ezer forint lenne a hasznuk. Határozza meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, 1: Judit, 2: Ancsa, 3: Fanni. A karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 6, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 16, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 26, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 36, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

39. Feladat. Egy halastó tulajdonosa befektetőket keres. Két befektető jelentkezik, az egyik horgásztavat akar kialakítani, a másik egy csúszdaparkot szeretne építeni a tónál. Mivel a csúszdázók elijesztenék a halakat, így a két tervet egyszerre nem lehet megvalósítani. A halastó haszna 5 millió forint, a horgásztóval 10 millió forint, a csúszdaparkkal 15 millió forint hasznót érhetnek el. Adja meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, 1: halastó-tulaj, 2: horgászto-befektető, 3: csúszdapark-befektető. A karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 5, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 10, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 15, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 15, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

40. Feladat. Az ENSZ biztonsági tanácsának 5 állandó és 10 választott tagja van. Egy határozat akkor lép életbe, ha az 5 állandó, és legalább 4 választott tag megszavazza. Adjon meg a feladathoz tartozó olyan súlyozott többségi szavazást, ahol a választott tagok súlya legyen 1, és az állandó tagok súlya a lehető legkisebb egész szám.

Megoldás. Az állandó tagok legkisebb súlya: 7 lehet. Az előadás jegyzet jelöléseit használva, a súlyozott többségi szavazás: $(39; 7, 7, \dots, 7, 1, 1, \dots, 1)$.

41. Feladat. Egy társasházban négy lakás van, az A lakás $100 m^2$, a B lakás $125 m^2$, a C $100 m^2$ és a D pedig $50 m^2$ alapterületű. A lakógyűlésen akkor szavaznak meg egy döntést, ha az arra szavazók lakásainak alapterülete a teljes alapterületnek legalább a fele. Adjuk meg a szavazáshoz tartozó karakterisztikus függvényt úgy, hogy a nyertes koalíciók esetén a függvény értéke legyen 1, különben pedig 0. Ezután határozzuk meg, hogy melyek azok a legkisebb nemnegatív egész súlyok, amelyek a lakásokhoz rendelhetők, ha súlyozott többségi szavazásként szeretnénk megadni a lakógyűlést.

Megoldás. Mivel az össz alapterület $375 m^2$, így legalább $187,5 m^2$ alapterülettel kell rendelkezni egy nyertes koalíciónak, tehát a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 0, & \text{ha } S = \{A\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{B\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{C\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{A, D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{B, D\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{C, D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, B\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{B, C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, B, C\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, C, D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, B, D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{B, C, D\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{A, B, C, D\}. \end{cases}$$

A karakterisztikus függvény alapján jól látszik, hogy a nagyobb (A, B, C) lakások esetén már bármely kettő nyerő koalíciót alkot. A kicsi (D) lakás viszont azzal, hogy belép egy

koalícióba nem változtat a koalíció pozícióján. Az előadás jegyzet jelöléseit használva, a súlyozott többségi szavazás a lakógyűlés esetén: $(2;1,1,1,0)$, azaz a D lakásban lakóknak nem számít szavazata.

42. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $y \succ x \succ z \succ u$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. A választást z nyeri, a közös sorrend: $z \succ x \succ y \succ u$.

43. Feladat. Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 15 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 1 szavazónál,
- $x \succ z \succ u \succ y$: 6 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 8 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. A választást x nyeri, a közös sorrend: $x \succ z \succ y \succ u$.

44. Feladat. Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 22 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ y \succ u \succ z$: 9 szavazónál,
- $y \succ x \succ z \succ u$: 6 szavazónál,
- $z \succ u \succ y \succ x$: 7 szavazónál.

Adja meg, hogy a Borda-pontozás alapján ki a győztes, és határozza meg a közös sorrendet is.

Megoldás. Az y a győztes, a közös sorrend: $y \succ x \succ z \succ u$.

45. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Végezzen $(0,1)$ -normalizációt az (N, v) 4-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{ha } |S| = 1; \\ 5, & \text{ha } |S| = 2; \\ 7, & \text{ha } |S| = 3; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Megoldás.

$$v'(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 3; \\ 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

46. Feladat. Végezzen $(0, 1)$ -normalizációt az (N, v) 6-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| = 1; \\ 3, & \text{ha } |S| = 2; \\ 5, & \text{ha } |S| = 3; \\ 7, & \text{ha } |S| = 4; \\ 10, & \text{ha } |S| = 5; \\ 12, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Megoldás.

$$v'(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{1}{3}, & \text{ha } |S| = 3; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } |S| = 4; \\ \frac{5}{6}, & \text{ha } |S| = 5; \\ 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

47. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Határozza meg a **38.** Feladatban megadott 3-személyes kooperatív játékhoz tartozó Shapley-értéket. (Használja a **38.** Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás. $\Phi(v) = (19, 6, 11)$.

48. Feladat. Határozza meg a **39.** Feladatban megadott 3-személyes kooperatív játékhoz tartozó Shapley-értéket. (Használja a **39.** Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás. $\Phi(v) = (\frac{65}{6}, \frac{5}{6}, \frac{10}{3})$.

49. Feladat. Határozza meg a $(3; 4, 1, 1)$ súlyozott többségi szavazáshoz tartozó karakterisztikus függvényt, és döntse el, hogy teljesül-e a szuperadditivitás.

Megoldás. Jelölje a 4-súlyú játékost d , a karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } d \in S; \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

szuperadditív.

50. Feladat. (*Kidolgozott feladat*) Igazolja, hogy a **38.** Feladatban megadott karakterisztikus függvény szuperadditív. Határozza meg az elosztások halmazát, és a kooperatív játék magját. (Használja a **38.** Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás.

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 36\},$$

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : 6 \leq x_1 \leq 30, 0 \leq x_2 \leq 10, 0 \leq x_3 \leq 20, x_1 + x_2 + x_3 = 36\}.$$

51. Feladat. Igazolja, hogy a **39.** Feladatban megadott karakterisztikus függvény szuperadditív. Határozza meg az elosztások halmazát, és a kooperatív játék magját. (Használja a **39.** Feladat megoldásában található jelöléseket.)

Megoldás.

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 5, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 15\},$$

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : 10 \leq x_1 \leq 15, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq 5, x_1 + x_3 = 15\}.$$

52. Feladat. Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ 0, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 2, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 4, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg az elosztások halmazát és a játék magját.

Megoldás.

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 4\},$$

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, 2 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 2, x_2 + x_3 = 4\}.$$

53. Feladat. (*Szitakötő vírus*²) A Nagy Kerekdő közepén ott áll a Toboz nevű kisfalu, szélén a Kék tavacskával, ahol sok szitakötő él. Egy meleg nyári délután Józsi bácsi a falu kis közösségének tyúkhúsleveset főzött falunapra, sokan ettek a házi finomságból. Másnap Piri néni elkezdett szédelegni, így elment a faluorvoshoz, hogy kivizsgáltassa magát. Dr. Kör Albert szitakötő vírust diagnosztizált. Kiderült, hogy Józsi bácsi tyúkjá beteg szitakötőt evett, így a tyúkhúsleves fertőzött volt. Mivel Piri néni állapota súlyos volt, ezért Dr. Kör Albert elküldte őt a patikába Károly bácsihoz, hogy vegyen Szitikusz gyógyszert, és szedje azt két hétig, majd utána jöjjön vissza ellenőrzésre. Sanyi is Piri nénihez hasonló panaszokkal érkezett meg a rendelőbe, de mivel az ő állapota nem volt olyan súlyos, ezért neki a doktor úr csak egy házi főzetet írt fel, amit Károly bácsi a patikában készített el. Dr. Kör Alberthez egyre több beteg érkezett szitakötő vírussal, ezért rendelt a gyógyszergyártótól Szitikuszt, hogy rögtön oda tudja adni a betegeknek a gyógyszert. Így Dr. Kör Albert és a gyógyszergyártó közös haszna 2,5 rut volt. Mivel a faluban elterjedt a hír, hogy szitakötő vírust kaptak el azok, akik Józsi bácsi tyúkhúsleveséből ettek, ezért voltak akik rögtön Károly bácsihoz mentek Szitikuszéért. Károly bácsinak is rendelnie kellett Szitikuszt. Abban az esetben, ha a beteg a doktor urat kihagyva rögtön Károly bácsihoz ment gyógyszerért, akkor Károly bácsinak és a gyógyszergyártónak a közös haszna 2,5 rut. Ha a beteg először Dr. Kör Alberthez ment, a doktor úr pedig Károly bácsihoz küldte Szitikuszéért, akkor Dr. Kör Albert, Károly bácsi és a gyógyszergyártó közös haszna 3 rut. Akinél Sanyiéhoz hasonló volt a betegség lefolyása, vagyis a kezelés megoldható volt Szitikusz nélkül, azoknál Dr. Kör Albert és Károly bácsi haszna 2 rut. Az egyes esetek bekövetkezése egymástól független és egyenletes. Hogyan oszthatják szét az együtműködés során befolyó pénzt? Adja meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét. Határozza meg az elosztások halmazát, a Shapley-értéket, és a játék magját.

²Kiskároly Tímea feladata

Megoldás. A játék résztvevőit jelölje, 1: Dr. Kör Albert, 2: György, 3: Károly bácsi.
A karakterisztikus függvény, az elosztások halmaza, a Shapley-érték és a mag:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 0, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ \frac{5}{2}, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 2, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ \frac{5}{2}, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 3, & \text{ha } S = N, \end{cases}$$

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 3\},$$

$$\Phi(v) = \left(\frac{11}{12}, \frac{7}{6}, \frac{11}{12} \right),$$

$$C(v) = \emptyset.$$