

Elemi bázistranszformáció (előadásjegyzet)

Kátai-Urbán Kamilla

Tekintsük a következő táblázatot:

	v_1	$\dots$	v_i	$\dots$	v_k
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1i}	$\dots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_j	a_{j1}	$\dots$	a_{ji}^*	$\dots$	a_{jk}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{ni}	$\dots$	a_{nk}

Az elemi bázistranszformációt a következőképpen hajtjuk végre:

- választunk egy generáló elemet: olyan nem 0 számot, amely e -vel jelölt sorban, és v -vel jelölt oszlopban van, a fenti táblázatban legyen ez az a_{ji} ,
- felcseréljük a generáló elem sor- és oszlopjelét,
- a generáló elemet lecseréljük a reciprokára,
- a generáló elem sorának többi elemét elosztjuk a generáló elemmel,
- a generáló elem oszlopának többi elemét elosztjuk a generáló elem -1 -szeresével,
- a többi elemet a következő "téglalapszabállyal" számoljuk.

A táblázatban "téglalapszabály" segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem, a generáló elemmel együtt, egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	b	$.$	d	$.$
e_2	$.$	$.$	$.$	$.$
e_3	a^*	$.$	c	$.$

Ebben az esetben, az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

Az eredeti táblázat az a_{ji} generáló elemmel végrehajtott elemi bázistranszformáció után a következő alakú lesz:

	v_1	$\dots$	e_j	$\dots$	v_k
e_1	$a_{11} - \frac{a_{j1}a_{1i}}{a_{ji}}$	$\dots$	$-\frac{a_{1i}}{a_{ji}}$	$\dots$	$a_{1k} - \frac{a_{jk}a_{1i}}{a_{ji}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_i	$\frac{a_{j1}}{a_{ji}}$	$\dots$	$\frac{1}{a_{ji}}$	$\dots$	$\frac{a_{jk}}{a_{ji}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	$a_{n1} - \frac{a_{j1}a_{ni}}{a_{ji}}$	$\dots$	$-\frac{a_{ni}}{a_{ji}}$	$\dots$	$a_{nk} - \frac{a_{jk}a_{ni}}{a_{ji}}$

1. Példa. Hajtsunk végre elemi bázistranszformációt a következő táblázaton, a generáló elem legyen a *-gal jelölt elem.

	v_1	v_2	v_3
e_1	2	-2	1
e_2	0	-2	3
e_3	1	2*	-3

	v_1	e_3	v_3
e_1	3	1	-2
e_2	1	1	0
v_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

2. Megjegyzés. Az elemi bázistranszformáció a következő részben szereplő szimplex algoritmus egy fontos lépése, de más esetben is használható, pl. egy *mátrix inverzének* meghatározására. Ha egy négyzetes mátrixot beírunk a táblázatba, és elemi bázistranszformációk sorozatával az összes v jelű oszlopot sikerül megcserélni az e jelű sorokkal (azaz az összes oszlopvektort bevisszük a bázisba), akkor a mátrix inverzét kapjuk. Ha nem tudjuk bevinni

az összes oszlopvektort, akkor a mátrixnak nincs inverze. A mátrix inverzének megadásakor az indexeknek növekvő sorrendben kell szerepelnie, ehhez oszlop és sorcserét hajthatunk végre.

3. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **23. feladatát**.