

Bimátrixjátékok

(előadásjegyzet, 2022. április 7.)

Kátai-Urbán Kamilla

A mátrixjátékok nullaösszegű játékok, azaz az egyik játékos nyeresége, a másik vesztesége, így egy mátrixszal tudtuk ábrázolni a kifizetéseket (kifizetési mátrix). Az első előadáson szerepeltek nem-nullaösszegű játékok is, ilyen volt pl. a fogoly-dilemma. Az ilyen típusú játékoknál a kifizetések ábrázolásához már nem elég egy mátrix, a két játékos kifizetését külön-külön mátrixszal lehet felírni, ezek a *bimátrixjátékok*.

1. A 2×2 -ES BIMÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA

Egy 2×2 -es bimátrixjáték esetén legyen az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix az első játékos, az $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ pedig a második játékos kifizetési mátrixa. Az első játékos optimális stratégiája legyen $X = (x, 1-x)$, a második játékos optimális stratégiája pedig $Y^T = (y, 1-y)$. A kevert satratégiát egyértelműen meghatározza az (x, y) pár.

- Az első játékos várható kifizetését jelölje az X, Y stratégia esetén: $E_1(x, y)$.
- A második játékos várható kifizetését jelölje az X, Y stratégia esetén: $E_2(x, y)$.

Egy stratégiát akkor nevezünk optimálisnak, ha egyensúlyi helyzet van, azaz ha a játékos egyoldalúan eltér ettől a stratégiától, akkor nem járhat jobban. Tehát ha az (x, y) pár a két játékos optimális stratégiáját jellemzi, akkor pl. $E_1(0, y) \leq E_1(x, y)$ teljesül, ugyanis ekkor az első játékos az optimális stratégiája helyett a második stratégiájával játszik, így nem nyerhet többet. Ehhez hasonlóan kapjuk a többi egyenlőtlenséget is:

1. $E_1(0, y) \leq E_1(x, y)$,
2. $E_1(1, y) \leq E_1(x, y)$,
3. $E_2(x, 1) \leq E_2(x, y)$,
4. $E_2(x, 0) \leq E_2(x, y)$.

Ahogy a mátrixjátékoknál, úgy itt is az XAY szorzat segítségével meg lehet adni az első játékos kifizetését abban az esetben, ha az X , illetve az Y stratégiával játszik a két játékos, tehát:

$$E_1(x, y) = XAY = (x, 1-x)A\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (x, 1-x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

Az 1. egyenlőtlenség a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &\geq E_1(0, y) \\ XAY &\geq (0, 1)AY \\ (X - (0, 1))AY &\geq 0 \\ ((x, 1-x) - (0, 1))\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} &\geq 0 \\ (x, -x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} &\geq 0 \\ x(1, -1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ha elvégezzük az $(1, -1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ szorzást, akkor az $(a-c, b-d)$ mátrixot kapjuk. Ezt megszorozva az $\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ mátrixszal az $ay - cy + b - d - by + dy = (a - b - c + d)y - (d - b)$ kifejezéshez jutunk. Vezessük be a $Q = a - b - c + d$ és a $q = d - b$ jelöléseket, így a fenti egyenlőtlenség a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} x((a - b - c + d)y - (d - b)) &\geq 0 \\ (1) \quad xQy - qx &\geq 0. \end{aligned}$$

Ha a 2. egyenlőtlenséget az 1. egyenlőtlenséghez hasonlóan mátrixos formában felírnánk, azt lehetne megfigyelni, hogy az egyenlőtlenség megfordul, és az x szerepét az $1-x$ veszi át, más szempontból a számolás ugyanúgy zajlik, tehát a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(2) \quad (1-x)Qy - q(1-x) \leq 0.$$

Vizsgáljuk az (1) és (2) egyenlőtlenségeket. A Q és q értékétől függően több eset lehetséges:

(i) $Q = 0$

- (a) $q = 0$: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;
- (b) $q > 0$: (1)-ből $x = 0$, (2)-ből $0 \leq y \leq 1$;
- (c) $q < 0$: (2)-ből $x = 1$, (1)-ből $0 \leq y \leq 1$.

(ii) $Q > 0$

- (a) $x = 0$, (2)-ből $y \leq \frac{q}{Q}$;
- (b) $x = 1$, (1)-ből $y \geq \frac{q}{Q}$;
- (c) $0 < x < 1$, (1)-ből $x(Qy - q) \geq 0$, $y \geq \frac{q}{Q}$, (2)-ből $(1 - x)(Qy - q) \leq 0$, $y \leq \frac{q}{Q}$, így $y = \frac{q}{Q}$.

(iii) $Q < 0$

- (a) $x = 0$, $y \geq \frac{q}{Q}$;
- (b) $x = 1$, $y \leq \frac{q}{Q}$;
- (c) $0 < x < 1$, $y = \frac{q}{Q}$.

Az 1. és 2. egyenlőtlenségekhez hasonlóan a 3. és 4. egyenlőtlenségekből megkaphatók a következők az $R = a' - b' - c' + d'$ és az $r = d' - c'$ jelöléseket bevezetve:

$$(3) \quad Rxy - ry \geq 0,$$

$$(4) \quad Rx(1 - y) - r(1 - y) \leq 0.$$

Itt is az R és r értékétől függően több eset lehetséges:

(iv) $R = 0$

- (a) $r = 0$: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;
- (b) $r > 0$: $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$;
- (c) $r < 0$: $0 \leq x \leq 1$, $y = 1$.

(v) $R > 0$

- (a) $y = 0$, $x \leq \frac{r}{R}$;
- (b) $y = 1$, $x \geq \frac{r}{R}$;
- (c) $0 < y < 1$, $x = \frac{r}{R}$.

(vi) $R < 0$

- (a) $y = 0$, $x \geq \frac{r}{R}$;
- (b) $y = 1$, $x \leq \frac{r}{R}$;
- (c) $0 < y < 1$, $x = \frac{r}{R}$.

Ha (x, y) esetén teljesülnek az (1), (2), (3) és (4) egyenlőtlenségek alapján megkapható feltételek is, akkor egyensúlyi pontot, optimális megoldást kaptunk. Hogy a feladatmegoldáshoz könnyebben fel tudjuk használni, külön fájlban megtalálható a 2×2 -es bimátrixjátékok megoldásának végeredménye itt.

1. Példa. Megoldjuk azt a 2×2 -es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a Q , q , R és r értékét. A $Q = a - b - c + d = 1 - 3 - 4 + 2 = -4$, $q = d - b = 2 - 3 = -1$, $R = a' - b' - c' + d' = 8 - 2 - 1 + 5 = 10$ és $r = d' - c' = 5 - 1 = 4$. Tehát a 2×2 -es bimátrixjáték megoldásában található esetek közül a $Q < 0$ -t és az $R > 0$ -t tekintve a következőt kapjuk:

- (iii) $Q = -4 < 0$
 - (a) $x = 0, y \geq \frac{q}{Q} = \frac{1}{4};$
 - (b) $x = 1, y \leq \frac{q}{Q} = \frac{1}{4};$
 - (c) $0 < x < 1, y = \frac{q}{Q} = \frac{1}{4}.$
- (v) $R = 10 > 0$
 - (a) $x \leq \frac{r}{R} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, y = 0;$
 - (b) $x \geq \frac{r}{R} = \frac{2}{5}, y = 1;$
 - (c) $x = \frac{r}{R} = \frac{2}{5}, 0 < y < 1.$

Akkor kapunk egyensúlyi helyzetet, ha az (x, y) pár valamelyik Q -nál és R -nél szereplő feltételt is teljesíti. Ha tekintjük a Q -nál lévő (a) feltételt, akkor nem találunk olyan R szerintit, ami teljesítené, ezek a feltételek egymásnak ellentmondanak. Hasonló a helyzet a Q -nál megadott (b) feltétel esetén is. Ha a Q -nál a (c)-t tekintjük, az teljesíti az R -nél megadott (c) feltételt is, így az $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{4}$ egyensúlyi pontot fognak adni. Ekkor az első játékos optimális stratégiája $X = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, a második játékosé $Y^T = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Az első játékos kifizetése a következő mátrixszorzásokkal számolható ki:

$$E_1(x, y) = E_1\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right) = XAY = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{4} \frac{3}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}.$$

Az második játékos kifizetése pedig a következő mátrixszorzásokkal számolható ki:

$$E_2(x, y) = E_2\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right) = XA'Y = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\left(\frac{8}{5} \frac{2}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{19}{5}, \frac{19}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{19}{5}.$$

Tehát az optimális megoldás az első játékos esetén $X = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, ekkor $\frac{5}{2}$ a kifizetés, a második játékos esetén $Y^T = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, és ekkor $\frac{19}{5}$ a kifizetése.

Az előző példában szereplő játéknak egy egyensúlyi helyzete volt, de ez nem minden esetben van így, ld. 2. példa.

2. Példa. Megoldjuk a feladatsor 33. feladatát.

(Ajándékozási-dilemma) A Young házaspárnak mindössze két kincse van, Jim családi örökségéből származó aranyórája és Della szép, hosszú haja. Karácsonyra meg akarják lepni egymást valami szép ajándékkal. Tudják egymásról, hogy mire vágnak; Jim egy óraláncra, Della pedig egy fésűs csatra. Mivel szegények, ezért pénzt csak a meglévő kincsük eladásával tudnak szerezni, de ezzel értéküket vesztik az ajándékok is. Ha mindketten eladják az értékeiket, akkor annak a szituációnak az értéke legyen 0. Az ajándékozás örömet értékeljük 2 egységgel, a megajándékozott örömet 1 egységgel. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Felírjuk a bimátrixjátékhoz tartozó két kifizetési mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a Q , q , R és r értékét, a $Q = R = 0 - 2 - 1 + 0 = -3$ és $q = r = 0 - 2 = -2$. Tehát a 2×2 -es bimátrixjáték megoldásában található esetek közül a $Q < 0$ -t és az $R < 0$ -t tekintve a következőt kapjuk:

- (iii) $Q = -3 < 0$
 - (a) $x = 0, y \geq \frac{q}{Q} = \frac{2}{3};$
 - (b) $x = 1, y \leq \frac{q}{Q} = \frac{2}{3};$
 - (c) $0 < x < 1, y = \frac{q}{Q} = \frac{2}{3}.$
- (vi) $R = -3 < 0$
 - (a) $x \geq \frac{r}{R} = \frac{2}{3}, y = 0;$
 - (b) $x \leq \frac{r}{R} = \frac{2}{3}, y = 1;$
 - (c) $x = \frac{r}{R} = \frac{2}{3}, 0 < y < 1.$

Akkor kapunk egyensúlyi helyzetet, ha az (x, y) pár valamelyik Q -nál és R -nél szereplő feltételt is teljesíti.

- (1) Ha tekintjük a Q -nál lévő (a) feltételt, akkor ez az R -nél található (b) feltételt is teljesíti, tehát $x = 0$ és $y = 1$. Ekkor a kifizetések leolvashatók az A és A' mátrixokból, mivel az első játékos a 2. tiszta stratégiájával játszik, a második pedig az 1. tiszta stratégiájával, így $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$.
- (2) Ha a Q -nál a (b) feltételt tekintjük, akkor ezek teljesítik az R szerinti (a)-t, így $x = 1$ és $y = 0$. Mivel tiszta stratégiákat alkalmaznak az előző esethez hasonlóan: $E_1(1, 0) = 2$, $E_2(1, 0) = 1$.
- (3) Az $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ pár pedig teljesíti mindkét (c) feltételt, így itt is egyensúlyi helyzetet kapunk. Az első játékos kifizetése:

$$E_1(x, y) = E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = XAY = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

A második játékos kifizetése hasonlóan számolható, $E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Összegezve a következő egyensúlyi pontokat és kifizetéseket kaptuk:

- (1) $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$;
- (2) $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(1, 0) = 2$, $E_2(1, 0) = 1$;
- (3) $X = Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Tehát ennél a feladatnál több egyensúlyi pont van, és ezek nem felcserélhetők, így a házaspár akkor tud jó megoldást hozni, ha kooperál.

3. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **32.**, **34.**, **35. feladatát**.

Érdekességgént lehet játszani a következő több körös bimátrixjátékkal: The evolution of trust