

Játékelmélet

2. zh mintafeladatok

TUDNIVALÓK

- Aki a dolgozatot meg szeretné írni, annak **CooSpace-en jelentkezni** kell, a jelentkezés május 4-én indul.
- **A zárthelyi dolgozatban 5-6 feladat lesz.**
- A mintafeladatoknál szereplő **pontszámok tájékoztató jellegűek.**
- Tollon, ceruzán és vonalzőn kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- A feladatok megoldására 45 **perc** áll rendelkezésre.

1. (3 pont) Írja le, hogyan zajlik az angol, a holland árverés és a Vickrey-aukció.
2. (5 pont) Bizonyítsa be a Vickrey-aukcióra vonatkozó tételt.
3. (3 pont) Definiálja a kooperatív játékok stratégiai ekvivalenciáját.
4. (5 pont) Bizonyítsa be a $(0, 1)$ -normalizált kooperatív játékról szóló tételt.
5. (3 pont) Adja meg az elosztás definícióját kooperatív játékok esetén.
6. (5 pont) Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rcll} x_1 & +x_3 & \leq & 2 \\ & x_2 +2x_3 & \leq & 1 \\ \hline x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 3 \\ \hline 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \rightarrow \max \end{array}$$

7. (5 pont) Az alábbi mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját **lineáris programozás** segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (5 pont) Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáit és a hozzá tartozó kifizetéseket annál a 2×2 -es bimátrixjátéknál, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza. (Az utolsó oldalon található segítség.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. (4 pont) Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 20 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ z \succ u \succ y$: 8 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 7 szavazónál,
- $y \succ z \succ u \succ x$: 5 szavazónál.

Határozza meg, hogy a Borda-pontozás alapján mi a közös sorrend.

10. (4 pont) Végezzen $(0, 1)$ -normalizációt az (N, v) 5-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| = 1; \\ 3, & \text{ha } |S| = 2; \\ 5, & \text{ha } |S| = 3; \\ 8, & \text{ha } |S| = 4; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

11. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 5, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 12, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 7, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 20, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg a játékhoz tartozó Shapley-értéket.

12. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a szuperadditív karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 3, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg az elosztások halmazát és a játék magját.

A 2×2 -es bimátrixjátékok

Egy 2×2 -es bimátrixjáték esetén legyen az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix az első játékos, az $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ pedig a második játékos kifizetési mátrixa. Az első játékos optimális stratégiája legyen $X = (x, 1 - x)$, a második játékos optimális stratégiája pedig $Y^T = (y, 1 - y)$. Jelölés: $Q = a - b - c + d$, $q = d - b$, $R = a' - b' - c' + d'$, $r = d' - c'$.

(i) $Q = 0$,

(a) $q = 0$: $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$;

(b) $q > 0$: $x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$;

(c) $q < 0$: $x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1$.

(ii) $Q > 0$,

(a) $x = 0, \quad y \leq \frac{q}{Q}$;

(b) $x = 1, \quad y \geq \frac{q}{Q}$;

(c) $0 < x < 1, \quad y = \frac{q}{Q}$.

(iii) $Q < 0$,

(a) $x = 0, \quad y \geq \frac{q}{Q}$;

(b) $x = 1, \quad y \leq \frac{q}{Q}$;

(c) $0 < x < 1, \quad y = \frac{q}{Q}$.

(iv) $R = 0$,

(a) $r = 0$: $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$;

(b) $r > 0$: $0 \leq x \leq 1, \quad y = 0$;

(c) $r < 0$: $0 \leq x \leq 1, \quad y = 1$.

(v) $R > 0$,

(a) $x \leq \frac{r}{R}, \quad y = 0$;

(b) $x \geq \frac{r}{R}, \quad y = 1$;

(c) $x = \frac{r}{R}, \quad 0 < y < 1$.

(vi) $R < 0$,

(a) $x \geq \frac{r}{R}, \quad y = 0$;

(b) $x \leq \frac{r}{R}, \quad y = 1$;

(c) $x = \frac{r}{R}, \quad 0 < y < 1$.