

A 2×2 -es mátrixjátékok megoldása

(előadásjegyzet, 2022. február 16.)

Kátai-Urbán Kamilla

Ismétlés.

1. Jelölés. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrix, ekkor jelölje A_i az A mátrix i . sorvektorát, ahol $i \in \{1, \dots, m\}$. A_j pedig jelölje az A mátrix j . oszlopvektorát tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

A Tiszta vs. kevert tétel következménye:

2. Következmény. Legyen az A egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v , továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.

(1) Ha X^* i . komponensére $x_i > 0$, akkor $A_i Y^* = v$.

(2) Ha Y^* j . komponensére $y_j > 0$, akkor $X^* A_j = v$.

A 2×2 -es mátrixjátékok megoldása.

Legyen az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyeregpont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyeregpont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

1) $a < b$, $a < c$, $d < c$, $d < b$;

2) $a > b$, $a > c$, $d > c$, $d > b$.

Jelölje $X^* = (x, 1-x)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^* = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < 1, \quad 0 < 1-x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < 1-y < 1.$$

Mivel az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla, a 2. Következmény felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^* A_1 = v, \quad X^* A_2 = v, \quad A_1 Y^* = v, \quad A_2 Y^* = v,$$

ahol v a játék értéke és A_1 az A mátrix első oszlopát, A_2 a második oszlopát, A_1 az első sorát, az A_2 pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$(x \ 1-x) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = v, \quad (x \ 1-x) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$ax + c(1-x) = v$$

$$bx + d(1-x) = v$$

$$ay + b(1-y) = v$$

$$cy + d(1-y) = v.$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az x , míg a második két egyenletből megkaphatjuk az y -t. Továbbá x -et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, v -t:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d}, \quad v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az A mátrix determinánsa szerepel.

3. Példa. Megoldjuk meg a feladatsor 9. feladatát.

Az alábbi A mátrix egy 2×2 -es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A sorminimumok maximuma 4, az oszlop maximumok minimuma 5, így nincs nyeregpont, a játék értéke: $4 \leq v \leq 5$. Felhasználva a kevert stratégiákra vonatkozó korábbi formulákat:

$$x = \frac{d - c}{a - b - c + d} = \frac{5 - 2}{6 - 4 - 2 + 5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{d - b}{a - b - c + d} = \frac{5 - 4}{6 - 4 - 2 + 5} = \frac{1}{5}.$$

Így az első játékos optimális stratégiája: $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, a második játékos optimális stratégiája: $Y^{*T} = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$. A játék értéke:

$$v = \frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{30 - 8}{6 - 4 - 2 + 5} = \frac{22}{5}.$$

4. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **7.,8.** és **10.-12. feladatát**.