

A 3×3 -as szimmetrikus mátrixjátékok megoldása

Definíció: Egy mátrixjátékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Legyen egy 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix ferdén szimmetrikus az 1. és 2. játékos optimális stratégiái megegyeznek, és a játék értéke $v = 0$.

A következő esetekben van nyeregpont:

- (1) $a > 0, b > 0$, ekkor az $(1, 1)$ nyeregpont,
- (2) $a \leq 0, c \geq 0$, ekkor a $(2, 2)$ nyeregpont,
- (3) $b \leq 0, c \leq 0$, ekkor a $(3, 3)$ nyeregpont.

Nincs nyeregpont, ha

- (a) $a > 0, b < 0, c > 0$,
- (b) $a < 0, b > 0, c < 0$.

Tekintsük az (a) esetet. Az Optimális stratégia tétele szerint az 1. játékosnak $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiája akkor és csak akkor, ha $XA_{\cdot j} \geq v = 0$, ahol $j = 1, 2, 3$. Ez a mátrix segítségével felírható:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0).$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -ax_2 - bx_3 &\geq 0 \\ ax_1 - cx_3 &\geq 0 \\ bx_1 + cx_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket átrendezve, figyelembe véve, hogy az (a) esetben $a, -b$, és c is pozitív, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{a} &\geq \frac{x_2}{-b} \\ \frac{x_1}{c} &\geq \frac{x_3}{a} \\ \frac{x_2}{-b} &\geq \frac{x_1}{c}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\frac{x_3}{a} \geq \frac{x_2}{-b} \geq \frac{x_1}{c} \geq \frac{x_3}{a}$, mivel az első és utolsó kifejezés megegyezik, ezért egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható. Jelöljük t -vel a hányadosok értékét: $\frac{x_3}{a} = \frac{x_2}{-b} = \frac{x_1}{c} = t$, tehát $x_1 = tc$, $x_2 = t(-b)$, $x_3 = ta$. Mivel x_1, x_2, x_3 a megfelelő stratégiák valószínűségét jelöli, így $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ teljesül, amelyből $t = \frac{1}{a-b+c}$ kifejezést kapjuk. A t helyébe ezt az összefüggést beírva az x_1, x_2, x_3 megadható.

A 3×3 -as szimmetrikus mátrixjáték esetén a játék értéke 0, valamint az 1. és a 2. játékos optimális stratégiája, ha $a > 0, b < 0, c > 0$:

$$x_1 = \frac{c}{a-b+c}, \quad x_2 = \frac{-b}{a-b+c}, \quad x_3 = \frac{a}{a-b+c}.$$

A (b) esetben a mátrix 2., 3. sorának, majd 2., 3. oszlopának felcserélésével az (a) esethez jutunk.

Példa: Tekintsük a kő-papír-olló játék mátrixát. Mivel ez a mátrix az előző (b) esetben felel meg, így végrehajtjuk a sor és oszlopcserét, és használjuk a formulát.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, így $x_1 = \frac{1}{1-(-1)+1} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Az x_2 és x_3 értékét fel kell cserélni ahhoz, hogy az eredeti játékhoz tartozó valószínűségeket kapjuk (ezek most megegyeznek): $X = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Feladat: Oldjuk meg a feladatsor **16.** és **17. feladatát**.