

3 × 3-as mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v .

Tiszta vs kevert tétel következménye: Legyen X az első játékos, Y a második játékos optimális stratégiája.

- (1) Ha X i . komponensére $x_i > 0$, akkor $A_i \cdot Y = v$.
- (2) Ha Y j . komponensére $y_j > 0$, akkor $XA_{\cdot j} = v$.

Optimális stratégia tétele:

- (1) Az X az első játékos optimális stratégiája $\iff v \leq XA_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- (2) Az Y a második játékos optimális stratégiája $\iff A_i \cdot Y \leq v$, $i = 1, 2, \dots, m$.

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét. Továbbá mivel az x_i -k és az y_i -k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i -kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \end{aligned} \tag{1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad y_3 > 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v) . Az egyenletek és az ismeretlenek számát

is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned}(a_{11} - a_{21})y_1 + (a_{12} - a_{22})y_2 + (a_{13} - a_{23})y_3 &= 0 \\(a_{21} - a_{31})y_1 + (a_{22} - a_{32})y_2 + (a_{23} - a_{33})y_3 &= 0 \\y_1 + y_2 + y_3 &= 1\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}k_1 &= a_{11} - a_{21} & k_2 &= a_{12} - a_{22} & k_3 &= a_{13} - a_{23} \\k_4 &= a_{21} - a_{31} & k_5 &= a_{22} - a_{32} & k_6 &= a_{23} - a_{33}\end{aligned}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned}k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 &= 0 \\k_4 y_1 + k_5 y_2 + k_6 y_3 &= 0 \\y_1 + y_2 + y_3 &= 1\end{aligned}\tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D \neq 0$):

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix} \\y_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix}}{D} \\y_2 &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ k_4 & 0 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix}}{D} \\y_3 &= \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_4 & k_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}}{D}\end{aligned}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3 . Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem teljesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel

következményét felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i -kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad x_3 > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\ (a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen

$$\begin{aligned} \ell_1 &= a_{11} - a_{12}, & \ell_2 &= a_{21} - a_{22}, & \ell_3 &= a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 &= a_{12} - a_{13}, & \ell_5 &= a_{22} - a_{23}, & \ell_6 &= a_{32} - a_{33}. \end{aligned}$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1x_1 + \ell_2x_2 + \ell_3x_3 &= 0 \\ \ell_4x_1 + \ell_5x_2 + \ell_6x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix} \\ x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D} \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D -vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.

Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i -ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja. Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

4. lépés: Foglalkozunk most azzal az esettel, amikor a 3×3 -as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot töröltünk a játék mátrixából, akkor 2×3 -as, 3×2 -es illetve 2×2 -es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3 -as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3 -as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékokra.

Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3 -as (vagy 3×2 -es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3 -as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.

Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3 -as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele feltételeit a 3×3 -as mátrixjátékokra nézve.

Példa: Megoldjuk a feladatsor 19. feladatát.

Az alábbi A mátrix egy 3×3 -as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sornimumok maximuma) 2, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 6, tehát a játék értéke $2 \leq v \leq 6$. Mivel a feladatban az szerepel, hogy az optimális stratégiák mindhárom komponense pozitív, így az előző algoritmus 3. lépésének (a) részével folytathatjuk. Felírjuk az (1) egyenletrendszernek megfelelő bővített mátrixot a 2. játékos optimális stratégiáira, és elvégezzük a kivonásokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 1 & v \\ 0 & 7 & 4 & v \\ 4 & 2 & 8 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 27 - (-36) + 18 = 81 \neq 0.$$

$$y_1 = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \quad y_2 = -\frac{-36}{81} = \frac{4}{9}, \quad y_3 = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}, \quad Y^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

Az egyenletrendszer speciális formájából adódik, hogy az egyes komponensek számológépben éppen a D determináns kiszámításakor megjelenő aldeterminánsok szerepelnek.

A játék értéke az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megkapható:

$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 4 = v.$$

Az első játékos optimális stratégiája hasonlóan számítható, csak az A helyett A^T szerepel a kezdeti egyenletrendszerben, $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

Feladat: Oldjuk meg a feladatsor **18.**, **20.**, **21. feladatát**. Figyeljünk arra, hogy nem minden esetben alkalmazható az algoritmus 3. lépése.