TUDNIVALÓK

- **A dolgozatban 7-8 feladat lesz.** A feladat pontszámok csak tájékoztató jellegűek, még változhatnak.
- **A CooSpace-en az előadás színterén található egy minta-dolgozat a „Gyakorlótesztek”-nél, amit ezekből a mintafeladatokból állítottam össze.** A gyakorlóteszt kitöltésének eredményét az oktató nem látja, csak gyakorlásra szolgál. Ügyeljenek, hogy a válaszokat a megadott formában írják. A helyes megoldások a kitöltés után visszanézhetők.
- **A helyes válasz önmagában nem elegendő. Minden feladat kézzel írt részletes megoldását is fel kell tölteni a dolgozat megírása után egy előre megadott helyre!**
- A dolgozatot önállóan kell megoldani. A dolgozat első lapjára kézzel le kell írni a következő nyilatkozatot a saját nevével (nem kell aláírni).

  .... kijelentem, hogy a zárthelyi dolgozat ideje alatt és a feltöltési határidő lejártáig más személynek semmilyen segítséget nem adtam és más személytől semmilyen segítséget nem fogadtam el. Tudomásul veszem az SZTE TTIK tanulmányi és vizsgaszabályzatában foglaltakat és bizonyított megszegés esetében a két félévre való tanulmányi felfüggesztést.
- A feladatok megoldására 100 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Adja meg az $\left((1\ 6\ 2\ 4)(1\ 3\ 6\ 4\ 5)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&6&5\end{pmatrix}\right)^7$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként.

A megoldásban ne használjon szóközt vagy vesszőt, azaz egy válasz az (12)(34) lehet. Minden ciklust a lehető legkisebb elemével kezdve írja fel, azaz (321) helyett írjon (132)-t. A ciklusokat a legkiseb mozgatott elemük szerinti növekvő sorrendben rendezve írja le, azaz (23)(14) helyett írjon (14)(23)-at. Az identitást id-vel jelölje. (8 pont)

MEGOLDÁS. (1534)(26)

2. Feladat. Hány olyan S_6-beli permutáció van, amelyben a mozgatott elemek száma 3? (8 pont)

MEGOLDÁS. 40

3. Feladat. Adja meg, hogy a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortér

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,\ x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_3 = 0\}$$

alterének dimenzióját. (8 pont)

MEGOLDÁS. 1

4. Feladat. Adja meg a $\mathbb{Z}_2^5$ vektortérben az

$$U = [(1,0,0,1,0),\ (0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,1)] \quad \text{és} \quad V = [(0,1,0,0,0),\ (0,0,1,0,1),\ (0,0,0,1,0)]$$

alterek összegének dimenzióját. (8 pont)

MEGOLDÁS. 5

5. Feladat. Adja meg a $\mathbb{Z}_2^5$ vektortérben az

$$U = [(1,0,0,1,0),\ (0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,1)] \quad \text{és} \quad V = [(0,1,0,0,0),\ (0,0,1,0,1),\ (0,0,0,1,0)]$$

alterek metszetének dimenzióját. (8 pont)

MEGOLDÁS. 1

6. Feladat. Adja meg a sík x-tengelyére való vetítés lineáris transzformáció mátrixát a $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, 1)$ bázisban.

A megoldásban a mátrix sorvektorait sorolja fel szóközök nélkül, vesszővel elválasztva, azaz egy lehetséges megoldás az (1,2),(3,4), ami az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot jelöli. (8 pont)

MEGOLDÁS. (2,-2),(1,-1)

7. Feladat. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

valós mátrix sajátértékeit.

Ha a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van, azokat növekvő sorrendben sorolja fel, vesszővel elválasztva, a megoldásban ne használjon szóközt. Ha a mátrixnak nincs valós sajátértéke, a válasza legyen x. (8 pont)

MEGOLDÁS. 1,7

8. Feladat. Adja meg a $\mathbb{Z}_3^3$ vektortér

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixú lineáris transzformációjának $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér bázisát.

A válaszban ne használjunk szóközt, és az elemeket és vektorokat vesszővel válasszuk el, azaz az (1,2,0),(0,0,1) egy lehetséges megoldás. A bázist úgy adjuk meg, hogy ha a bázisvektorokat egy mátrix soraiba írjuk, akkor az lépcsős alakú és a vezéregyesek felett is nullák vannak. (8 pont)

MEGOLDÁS. (1,0,1),(0,1,1)

9. Feladat. Határozza meg a $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ valós kvadratikus alak definitségi osztályát. (8 pont)

MEGOLDÁS. pozitív szemidefinit

10. Feladat. Az $\mathbb{R}^2$ euklideszi térben a $v_1 = (4, 4)$, $v_2 = (1, -3)$ vektorrendszeren hajtson végre a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást úgy, hogy csak ortogonális vektorokat készítünk, azokat nem normalizáljuk. Ehhez csak a v_2 vektort kell módosítani az eljárás szerint. Adja meg a kapott vektort, a válaszban ne használjon szóközt, és a komponenseket vesszővel válassza el, azaz egy lehetséges megoldás az (1,2) vektor. (8 pont)

MEGOLDÁS. (2,-2)

11. Feladat. Adja meg, hogy az $f = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 14x^2 - 20x - 24 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a $c = -2$ pontosan hányszoros gyöke. (8 pont)

MEGOLDÁS. 3

12. Feladat. Határozza meg az $f = 2x^3 + 5x^2 + 8x + 3$ polinom racionális gyökeit.

Ha a polinomnak több különböző racionális gyöke van, azokat növekvő sorrendben sorolja fel, vesszővel elválasztva, a megoldásban ne használjon szóközt. A nem egész gyököket közönséges törtként írja, például -2/5 alakban. Ha a polinomnak nincs racionális gyöke, akkor a válasza legyen x. (8 pont)

MEGOLDÁS. -1/2

13. Feladat. Végezze el a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2\rangle$ véges testben az $\overline{x^2 + 2x + 2} \cdot \overline{x + 2}$ műveletet.

A végeredmény a test 27 eleme közül kerüljön ki. A választ 3 komponensű vektorként adja meg, úgy, hogy az együtthatók a konstanstól kezdve legyenek felírva. Például ha $\overline{2x + 1}$ az eredmény, akkor (1,2,0) alakban írja. (8 pont)

MEGOLDÁS. (2,0,0)

14. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + 2x + 1\rangle$ véges testben az $\overline{x + 1}$ elem inverzét.

A végeredmény a test 27 eleme közül kerüljön ki. A választ 3 komponensű vektorként adja meg, úgy, hogy az együtthatók a konstanstól kezdve legyenek felírva. Például ha $\overline{2x + 1}$ az eredmény , akkor (1,2,0) alakban írja.

(8 pont)

MEGOLDÁS. (0,1,2)

15. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+2x+2\rangle$ testben a $\overline{2x+2}$ elem rendjét. (8 pont)

MEGOLDÁS. 4

16. Feladat. Tervezzen a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle$ test $\beta=\overline{x+1}$ eleme segítségével ciklikus Hamming-kódot. Adja meg a kód generátormátrixát.

A válaszban a generátormátrix első sorát adja meg vektor alakban, a komponenseket vesszővel válassza el, és ne használjon szóközt, azaz (1,0,0,1,1,0) egy lehetséges megoldás. A papírra leírt megoldásban a teljes generátormátrixnak szerepelenie kell. (12 pont)

MEGOLDÁS. (1,0,1,1,0,0,0)

17. Feladat. Tervezzen a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle$ test $\alpha=\overline{x^2+x}$ eleme segítségével 7-hosszú 1-hibajavító BCH-kódot. Adja meg a kód generátormátrixát.

A válaszban a generátormátrix első sorát adja meg vektor alakban, a komponenseket vesszővel válassza el, és ne használjon szóközt, azaz (1,0,0,1,1,0) egy lehetséges megoldás. A papírra leírt megoldásban a teljes generátormátrixnak szerepelenie kell. (12 pont)

MEGOLDÁS. (1,1,0,1,0,0,0)

18. Feladat. Tervezzen a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+x^2+2\rangle$ test $\alpha=\overline{x+1}$ eleme segítségével 9-hosszú 2-hibajelző BCH-kódot. Adja meg a kód generátormátrixát.

A válaszban a generátormátrix első sorát adja meg vektor alakban, a komponenseket vesszővel válassza el, és ne használjon szóközt, azaz (1,0,0,2,1,0) egy lehetséges megoldás. A papírra leírt megoldásban a teljes generátormátrixnak szerepelenie kell. (12 pont)

MEGOLDÁS. (1,2,1,2,2,2,1,0,0)